

Ensaíos Matemáticos

<https://doi.org/10.21711/217504321990/em21>

in: Ensaíos Matemáticos | Periodical Volume

1 - 102

## Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes.

Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

### Contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek

Digitalisierungszentrum

37070 Goettingen

Germany

Email: [gdz@www.sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@www.sub.uni-goettingen.de)

### Purchase a CD-ROM

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:

Niedersaechisische Staats- und Universitaetsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum

37070 Goettingen, Germany, Email: [gdz@www.sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@www.sub.uni-goettingen.de)

---

# ENSAIOS MATEMÁTICOS

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

---

*Étude Topologique des Applications  
Déviant la Verticale*

PATRICE LE CALVEZ

Université d'Orsay



VOLUME 2 1990

## Ensaio Matemáticos

Esta série objetiva publicar textos sobre temas atuais da Matemática, permitindo ao leitor, através de exposições acessíveis, adquirir ampla perspectiva do assunto em questão, inclusive no que se refere a seus aspectos em aberto. Os trabalhos devem ser enviados a um dos editores.

This series is intended as a vehicle for survey papers in all areas of Mathematics. The aim of the series is to offer readers an accessible overview of current topics in Mathematics. The Brazilian Mathematical Society invites authors to submit papers for inclusion in the series by sending their work to one of the editors.

Full instructions on the preparation of copy are available from the editors upon request.

### Editors

Ju. Il'yashenko  
Moscow State University  
Department of Mathematics  
Moscow - USSR - 117234

R. Moussu  
Département de Mathématiques  
Université de Dijon  
Dijon - France - 21004

P. Sad  
Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA  
Estrada D. Castorina 110 - J. Botânico  
Rio de Janeiro - Brazil - 22460

### How to order Ensaio Matemáticos

Ensaio Matemáticos are available directly from the Brazilian Mathematical Society by writing to the following address:

Ensaio Matemáticos  
Sociedade Brasileira de Matemática  
Estrada Dona Castorina, 110  
22460 Rio de Janeiro RJ  
Brazil

©1990 Sociedade Brasileira de Matemática

Financed by the Programa de Apoio a Publicações Científicas CNPq/FINEP.  
Partial support from IBM of Brazil.

Depuis Poincaré et Birkhoff pour comprendre la structure des orbites d'un système hamiltonien à deux degrés de liberté au voisinage d'une orbite périodique élliptique on est amené à étudier les difféomorphismes du plan qui préservent l'aire autour d'un point fixe élliptique. Dans le cas générique, on est alors amené, à l'aide des formes normales à étudier une classe d'applications: les difféomorphismes de l'anneau qui préservent l'aire et qui dévient la verticale. C'est dans ce cadre que l'on déduit, parmi d'autres propriétés, l'existence de courbes invariantes entourant le point fixe, formant transversalement un ensemble de Cantor de mesure positive dont la densité tend vers un quand on s'approche du point fixe, et de régions annulaires d'instabilité bordées par ces courbes où se crée une dynamique de type chaotique due à des intersections de variétés stables et instables de points périodiques hyperboliques.

Des méthodes variationnelles introduites indépendamment par S. Aubry et J. Mather en 1980 ont alors permis de construire une théorie des difféomorphismes de l'anneau qui préservent l'aire et qui dévient la verticale permettant entre autres de comprendre la dynamique des régions d'instabilité, ou d'étudier d'autres exemples comme celui du billard convexe introduit par Birkhoff. On retrouve ce type de méthodes et de résultats dans d'autres systèmes dynamiques conservatifs (voir V. Bangert [Ba] ou J. Moser [Mo 1, Mo 2]).

Il existe cependant des systèmes dynamiques où apparaissent des applications qui dévient la verticale mais qui ne préservent pas l'aire. C'est pour cette raison que nous tâcherons d'expliquer

comment des méthodes topologiques permettent de retrouver les principaux résultats du cas conservatif et ainsi d'étudier ces applications, en particulier nous insisterons très peu sur les méthodes variationnelles.

Dans un premier chapitre nous donnerons une liste non exclusive de systèmes dynamiques définis par des applications qui dévient la verticale, puis dans les deux chapitres suivants introduirons les notions et les outils principaux de notre étude. Ainsi dans le Chapitre 2 nous définirons les ensembles d'Aubry-Mather, esquisserons la théorie variationnelle par une démonstration d'existence de ces ensembles dans le cas conservatif, et donnerons enfin des critères topologiques pour les obtenir. Le Chapitre 3 sera consacré à la théorie de Birkhoff, c'est-à-dire à l'étude des ensembles annulaires invariants, que nous essayerons de généraliser. Les trois chapitres suivants seront des conséquences de ce qui précède. Ainsi dans le Chapitre 4 nous étudierons les applications proches de celles qui sont conservatives et dans le Chapitre 6 celles qui sont dissipatives, nous nous intéresserons en particulier aux attracteurs de Birkhoff. Le Chapitre 5 sera consacré à l'étude des régions d'instabilité dans le cas conservatif.

Ce qui suit est la rédaction d'un cours donné à l'IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada), Rio de Janeiro, au printemps 1988. C'est un grand plaisir de remercier le personnel scientifique et administratif de cet institut pour l'extraordinaire ambiance mathématique et la gentillesse de leur accueil.

## TABLE DES MATIÈRES

|  |     |
|--|-----|
| Chapitre 1: Exemples de difféomorphismes de l'anneau déviant<br>la verticale . . . . . | 7   |
| Chapitre 2: Les ensembles d'Aubry-Mather . . . . .                                     | 23  |
| Chapitre 3: La théorie de Birkhoff . . . . .   | 48  |
| Chapitre 4: Persistance des ensembles d'Aubry-Mather . . . . .                         | 67  |
| Chapitre 5: Étude des régions d'instabilité . . . . .                                  | 76  |
| Chapitre 6: Les attracteurs de Birkhoff . . . . .                                      | 89  |
| Références . . . . .   | 100 |



# Chapitre 1

## EXEMPLES DE DIFFÉOMORPHISMES DE L'ANNEAU DÉVIANT LA VERTICALE

Dans ce chapitre nous donnons d'une part la définition précise des difféomorphismes qui dévient la verticale, d'autre part quelques systèmes dynamiques définis par ces applications. Commençons par préciser les notations que nous utiliserons jusqu'à la fin de cette étude.

### §1 Notations

Nous notons  $\mathbf{T}^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$  le tore de dimension 1 et  $\mathbf{A}$  l'anneau  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$  muni de sa structure de variété usuelle. Il n'y aura pas de risques de confusion, ainsi nous désignerons par les mêmes lettres un point  $x = (\theta, r)$  de  $\mathbf{A}$  et de son revêtement universel  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ , de même que nous appellerons par le même nom les deux projections  $p_1$  et  $p_2$  définies à la fois sur  $\mathbf{A}$  et  $\tilde{\mathbf{A}}$ .

Nous considérons les applications

$$\begin{aligned} \pi: \tilde{\mathbf{A}} &\rightarrow \mathbf{A}, & (\theta, r) &\mapsto (\theta + \mathbf{Z}, r) \\ \text{et } T: \tilde{\mathbf{A}} &\rightarrow \tilde{\mathbf{A}}, & (\theta, r) &\mapsto (\theta + 1, r) \end{aligned}$$

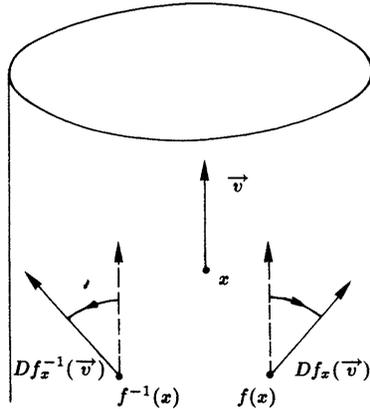
et noterons  $\tilde{X}$  la préimage  $\pi^{-1}(X)$  de toute partie  $X$  de  $\mathbf{A}$ .

Pour tout point  $x = (\theta, r)$  de  $\mathbf{A}$  (ou de  $\tilde{\mathbf{A}}$ ) nous définissons les verticales:

$$\begin{aligned} D^i(x) &= \{\theta\} \times ]-\infty, r] \\ D^s(x) &= \{\theta\} \times [r, +\infty[. \end{aligned}$$

## Patrice Le Calvez

Nous identifions une application de  $\mathbf{T}^1$  dans  $\mathbf{R}$  et une application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  de période 1, nous pouvons ainsi parler d'une application de  $\mathbf{T}^1$  dans  $\mathbf{R}$  continue à droite ou continue à gauche. Si  $\psi$  et  $\psi'$  sont deux applications de  $\mathbf{T}^1$  dans  $\mathbf{R}$  nous écrirons  $\psi \leq \psi'$  (resp.  $\psi < \psi'$ ) si  $\psi(\theta) \leq \psi'(\theta)$  (resp.  $\psi(\theta) < \psi'(\theta)$ ), pour tout  $\theta \in \mathbf{T}^1$ . Enfin nous noterons  $C^0(\mathbf{T}^1)$  (resp.  $C^1(\mathbf{T}^1)$ ) l'ensemble des applications continues (resp. de classe  $C^1$ ) de  $\mathbf{T}^1$  dans  $\mathbf{R}$ .



**DÉFINITION:** Nous dirons qu'un difféomorphisme  $f$  de  $\mathbf{A}$  isotope à l'identité dévie la verticale à droite si et seulement s'il existe  $\beta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  tel que pour tout point  $x$  de  $\mathbf{A}$ , l'angle formé par le vecteur  $\vec{v} = (0, 1)$  et le vecteur  $Df_x(\vec{v})$  (resp.  $Df_x^{-1}(\vec{v})$ ) soit compris entre  $\beta - \pi$  et  $-\beta$  (resp. entre  $\beta$  et  $\pi - \beta$ ).

Nous noterons  $\mathcal{K}$  l'ensemble des difféomorphismes de  $\mathbf{A}$  déviant la verticale à droite et  $\tilde{\mathcal{K}}$  l'ensemble des relèvements à  $\tilde{\mathbf{A}}$  d'éléments de  $\mathcal{K}$ . Chacun des ensembles  $\mathcal{K}$  et  $\tilde{\mathcal{K}}$  sera muni par la suite de la

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

topologie compacte-ouverte.

### §2 Exemples

**Exemple 1:** Un exemple explicite.

Soit  $\varphi$  dans  $C^1(\mathbb{T}^1)$  et  $\lambda$  dans  $]0, +\infty[$ , l'application  $\tilde{f}_\varphi^\lambda: \tilde{\mathbf{A}} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}, (\theta, r) \mapsto (\theta + r, \lambda r + \varphi(\theta + r))$  est un difféomorphisme de classe  $C^1$  de  $\tilde{\mathbf{A}}$  isotope à l'identité qui relève un difféomorphisme de  $\mathbf{A}$ , noté  $f_\varphi^\lambda$ .

En tout point  $x = (\theta, r)$  de  $\tilde{\mathbf{A}}$ , la matrice de  $D\tilde{f}_\varphi^\lambda(x)$  s'écrit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi'(\theta + r) & \lambda + \varphi'(\theta + r) \end{pmatrix}.$$

Ainsi les images respectives par  $D\tilde{f}_\varphi^\lambda(x)$  et  $(D\tilde{f}_\varphi^\lambda)^{-1}(x)$  du vecteur  $(0,1)$  sont  $(1, \lambda + \varphi'(\theta + r))$  et  $(-1,1)$ , on en déduit que  $\tilde{f}_\varphi^\lambda$  est un élément de  $\tilde{\mathcal{K}}$ .

Nous reverrons très souvent cette classe d'applications. Notons que si  $\lambda$  est égal à 1, l'aire est préservée par  $\tilde{f}_\varphi^\lambda$  alors qu'elle est diminuée si  $\lambda$  est entre 0 et 1.

**Exemple 2:** Le billard convexe.

Exposons l'exemple du billard du à G.D. Birkhoff [Bi 2] (pour plus de détails voir par exemple R. Douady [D], d'où est tiré d'ailleurs ce qui suit).

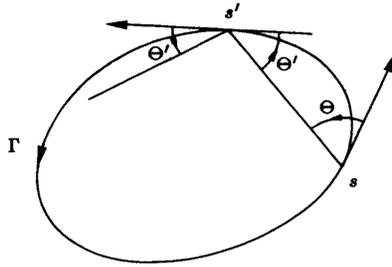
Considérons une courbe simple convexe  $\Gamma$  de classe  $C^k$  ( $k \geq 2$ ) et de longueur 1 et l'application suivante:

à chaque couple formé d'un point de  $\Gamma$  et d'une droite passant par ce point, on associe le couple formé d'une part par le second

## Patrice Le Calvez

point d'intersection de la droite avec  $\Gamma$ , d'autre part de la droite symétrique par rapport à la normale à  $\Gamma$  en ce second point.

Si l'on se donne une paramétrisation  $\gamma: \mathbf{T}^1 \rightarrow \Gamma$ ,  $s \mapsto \gamma(s)$  de  $\Gamma$  avec  $\|\gamma'(s)\| = 1$ , on peut caractériser chaque droite passant par  $\gamma(s)$  par l'angle, défini modulo  $\pi$ , qu'elle fait avec  $\gamma'(s)$  et on obtient une application  $F$  de  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$  dans lui-même.

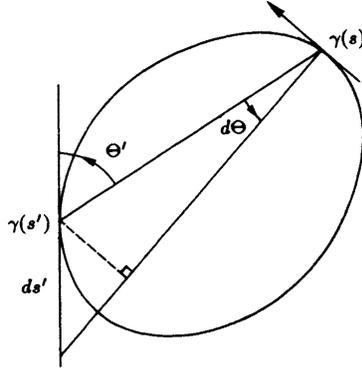


Cette application est bijective et induit l'identité sur le tore  $\mathbf{T}^1 \times \{0\}$  (c'est le cas où la droite est tangente).

**PROPOSITION.** –  $F$  est un homéomorphisme,  
– la restriction de  $F$  à  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z} \setminus \mathbf{T}^1 \times \{0\}$  est un difféomorphisme de classe  $C^{k-1}$ .

**DÉMONSTRATION:** Si  $s$  et  $s'$  sont deux points de  $\mathbf{T}^1$  distincts on note  $\Theta(s, s')$  l'angle  $\langle \overrightarrow{\gamma'(s)}, \gamma(s) - \gamma(s') \rangle$  et  $\Theta'(s, s')$  l'angle  $\langle \gamma(s') - \gamma(s), \overrightarrow{\gamma'(s')} \rangle$ ; s'ils sont égaux on pose  $\Theta(s, s') = \Theta'(s, s') = 0$ . On obtient ainsi deux applications de classe  $C^{k-1}$  vérifiant  $\frac{\partial \Theta}{\partial s'}(s, s') = \frac{|\sin \Theta'(s, s')|}{\|\gamma(s) - \gamma(s')\|} > 0$  quand  $s$  et  $s'$  sont distincts.

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale



On en déduit que l'application

$$G: \mathbf{T}^1 \times \mathbf{T}^1 \rightarrow \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$$

$$(s, s') \mapsto (s, \Theta(s, s'))$$

est un homéomorphisme qui envoie  $\Delta = \{(s, s), s \in \mathbf{T}^1\}$  sur  $\mathbf{T}^1 \times \{0\}$  et qui induit un difféomorphisme de classe  $C^{k-1}$  entre  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{T}^1 \setminus \Delta$  et  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z} \setminus \mathbf{T}^1 \times \{0\}$ .

L'application

$$G': \mathbf{T}^1 \times \mathbf{T}^1 \rightarrow \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$$

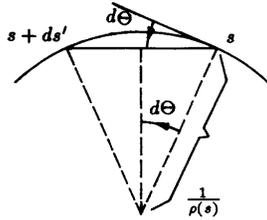
$$(s, s') \mapsto (s', \Theta'(s, s'))$$

vérifie les mêmes propriétés. La proposition est alors une conséquence de l'égalité  $F = G' \circ G^{-1}$ . □

REMARQUE 1: Si  $\rho(s)$  est la courbure en  $s$ , la quantité  $\frac{\partial \Theta}{\partial s'}(s, s)$  est égale à  $\frac{\rho(s)}{2}$ .

Ainsi si la courbe est fortement convexe (c'est-à-dire si la fonction courbure est strictement positive), les applications  $G, G'$  et  $F$  sont des difféomorphismes de classe  $C^{k-1}$  de la variété toute entière.

Patrice Le Calvez

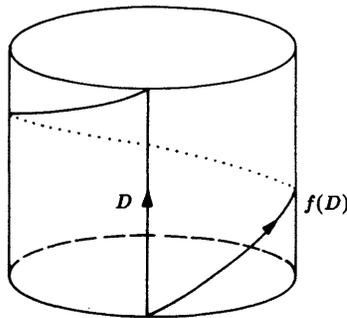


REMARQUE 2: La fonction  $\ell: \mathbf{T}^1 \times \mathbf{T}^1 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $(s, s') \mapsto \|\gamma(s) - \gamma(s')\|$  a une différentielle sur  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{T}^1 \setminus \Delta$  qui s'écrit

$$d\ell = \cos \Theta'(s, s') ds' - \cos \Theta(s, s') ds.$$

En écrivant  $dd\ell = 0$ , on en déduit que  $F$  préserve la forme volume  $\omega = \sin \theta ds \wedge d\theta$ .

REMARQUE 3: L'application  $F$  se relève en un homéomorphisme  $f$  de  $\mathbf{T}^1 \times [0, \pi]$  qui induit l'identité sur chaque bord de l'anneau, qui est un difféomorphisme de classe  $C^{k-1}$  de l'intérieur (de l'anneau tout entier dans le cas fortement convexe) déviant la verticale et préservant une forme volume. L'image d'une verticale s'enroule autour de l'anneau comme l'indique le dessin suivant.



## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

**Exemple 3:** Le pendule amorti entretenu.

Nous allons étudier une équation différentielle où apparaissent des applications déviant la verticale (voir Casdagli [Ca 2]).

Soit l'équation suivante:

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \sin 2\pi\theta = p(t)$$

où  $p$  est une fonction de classe  $C^k$  ( $k \geq 3$ ) et de période  $T > 0$ , et où  $\alpha$  est un réel strictement positif. Cette équation se ramène par le changement de variable  $r = \dot{\theta}$ ,  $\psi = t$  au système suivant:

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= r \\ \dot{r} &= -\alpha r - \sin 2\pi\theta - p(\psi) \\ \dot{\psi} &= 1 \end{cases}$$

c'est-à-dire à un champ de vecteurs sur  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}/T\mathbf{Z}$ . Ce champ est transverse à chacune des sections  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R} \times \{\psi\}$  et nous pouvons considérer l'application de Poincaré  $F$  associée à  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R} \times \{0\}$ .

Remarquons que  $\dot{x}$  est strictement négatif dès que  $r$  est supérieur à  $r_o = \alpha^{-1}(1 + \sup_{t \in \mathbf{R}} |p(t)|)$  et strictement positif si  $r$  est inférieur à  $-r_o$ . Ainsi l'anneau  $\mathbf{T}^1 \times [-r_o, r_o] \times \mathbf{R}/T\mathbf{Z}$  est un attracteur; le champ est rentrant sur son bord et toute orbite aboutit dans l'anneau. Nous allons montrer le résultat suivant pour la restriction de  $F$  à  $\mathbf{T}^1 \times [-r_o, r_o] \times \{0\} = \mathbf{T}^1 \times [-r_o, r_o]$ .

**PROPOSITION.** *Il existe des applications  $F_o, \dots, F_{n-1}$  de  $\mathbf{T}^1 \times [-r_o, r_o]$  dans lui-même, diminuant l'aire et déviant la verticale à droite, telles que  $F = F_{n-1} \circ F_{n-2} \circ \dots \circ F_o$ .*

**DÉMONSTRATION:** On note  $\phi_t$  le flot défini par le champ de vecteurs et, l'entier  $n$  étant fixé,  $F_i$  l'application de passage entre

**Patrice Le Calvez**

$\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R} \times \{\frac{i}{n} T\}$  et  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R} \times \{\frac{i+1}{n} T\}$ , c'est-à-dire le difféomorphisme  $F_i$  de  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$  défini par:

$$\phi_{\frac{i}{n}}(\theta, r, \frac{i}{n} T) = (F_i(\theta, r), \frac{i+1}{n} T).$$

Chacun des  $F_i$  envoie  $\mathbf{T}^1 \times [-r_o, r_o]$  dans lui-même et l'on a  $F = F_{n-1} \circ \dots \circ F_o$ . D'autre part la divergence du flot est égale à  $-\alpha$  et le Jacobien de  $F_i$  constant égal à  $e^{-\frac{\alpha T}{n}}$  donc inférieur à 1. La proposition sera démontrée si l'on prouve pour  $n$  assez grand l'assertion suivante:

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \forall (\theta, r) \in \mathbf{T}^1 \times [-r_o, r_o], \quad \frac{\partial}{\partial r} p_1 \circ F_i(\theta, r) > 0,$$

ceci est une conséquence du lemme suivant.

LEMME. *Si  $t$  est positif et suffisamment petit, alors:*

$$\forall (\theta, r, \psi) \in \mathbf{T}^1 \times [-r_o, r_o] \times \mathbf{R}/T\mathbf{Z}, \quad \frac{\partial}{\partial r} p_1 \circ \phi_t(\theta, r, \psi) > 0.$$

DÉMONSTRATION: La fonction qui à  $(t, \theta, r, \psi)$  associe

$\frac{\partial}{\partial r} p_1 \circ \phi_t(\theta, r, \psi)$  est de classe  $C^2$ , la formule de Taylor donne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} p_1 \circ \phi_u(\theta, r, \psi) &= \frac{\partial}{\partial r} p_1 \circ \phi_t(\theta, r, \psi)|_{t=0} \\ &+ u \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} p_1 \circ \phi_t(\theta, r, \psi)|_{t=0} + \int_0^u (t-u) \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial r} p_1 \circ \phi_t(\theta, r, \psi) dt \\ &= 0 + u + \int_0^u (t-u) \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial r} p_1 \circ \phi_t(\theta, r, \psi) dt. \end{aligned}$$

Mais la fonction qui à  $(t, \theta, r, \psi)$  associe  $\frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial r} p_1 \circ \phi_t(\theta, r, \psi)$  étant bornée sur  $[0, 1] \times \mathbf{T}^1 \times [-r_o, r_o] \times \mathbf{R}/T\mathbf{Z}$  par un réel  $M$ , on

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

a l'inégalité  $\left| \frac{\partial}{\partial r} p_1 \circ \phi_u(\theta, r, \psi) - u \right| < \frac{M}{2} u^2$  pour  $u \in [0, 1]$  et  $(\theta, r, \psi) \in \mathbf{T}^1 \times [-r_0, r_0] \times \mathbf{R}/T\mathbf{Z}$  et ceci prouve le lemme.  $\square$

REMARQUE: L'étude de notre champ de vecteurs se ramène à un produit d'applications déviant la verticale et non pas à une application. Il se trouve, même si nous n'en parlerons pas, que les phénomènes que nous étudierons se généralisent quand on considère un produit d'applications déviant la verticale. Remarquons d'autre part que l'égalité d'où provient la déviation de la verticale est l'égalité "triviale"  $\dot{r} = \theta$ , aussi ce qui vient d'être fait se généralise au cas d'un grand nombre d'équations différentielles du second-ordre à coefficients périodiques. Pour les liens entre les applications qui dévient la verticale et des équations différentielles on peut consulter Bangert [B] ou Moser [Mo 1, Mo 2].

**Exemple 4:** Étude de la dynamique d'un difféomorphisme préservant l'aire au voisinage d'un point fixe elliptique.

Soit  $f$  un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  défini au voisinage de 0 dans  $\mathbf{R}^2$ , laissant fixe ce point, préservant la forme  $dx \wedge dy$  et tel que les valeurs propres de  $Df(0)$  soient sur le cercle unité ( $\lambda = e^{2i\pi\alpha}$ ,  $\bar{\lambda} = e^{-2i\pi\alpha}$  où  $\alpha \in \mathbf{R}$ ) et vérifient  $\lambda^n \neq 1$  pour  $n$  appartenant à  $\{1, \dots, q\}$ .

Ce difféomorphisme admet à tout ordre un développement limité:

$$\begin{cases} X &= \sum_{i=1}^n P_i(x, y) + o((|x| + |y|)^n) \\ Y &= \sum_{i=1}^n Q_i(x, y) + o((|x| + |y|)^n) \end{cases}$$

où les  $P_i$  et  $Q_i$  sont des polynômes homogènes réels de degré  $i$ , que l'on peut écrire aussi sous une forme complexe, en posant  $Z =$

## Patrice Le Calvez

$$X + iY, z = x + iy, \bar{z} = x - iy$$

$$Z = \sum_{i=1}^n R_i(z, \bar{z}) + o(|z|^n)$$

où les  $R_i$  sont des polynômes homogènes complexes en  $z$  et  $\bar{z}$  de degré  $i$  (pour  $n = 1$ ,  $Z = \lambda z + o(|z|)$ ).

Le problème des formes normales est de trouver un système de coordonnées où ces polynômes ont la forme la plus simple possible. Ici nous aurons le résultat suivant dû à Birkhoff [Bi 1] (voir également [SM]).

**THÉORÈME 1.1.** *Il existe un difféomorphisme  $h$  de classe  $C^\infty$ , défini au voisinage de 0, laissant fixe ce point et préservant la forme  $dx \wedge dy$  tel que:*

$$h \circ f \circ h^{-1}(z) = \lambda z e^{2i\pi P(z\bar{z})} + o(|z|^{q-1})$$

où  $P(X) = a_1 X + \dots + a_m X^m$  est un polynôme réel de degré  $m$  tel que  $2m + 1 < q$ .

**DÉMONSTRATION:** Soit  $N$  le premier élément de  $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$  tel que  $\lambda^N = 1$ , faisons une récurrence sur  $q \in \{2, \dots, N - 1\}$ . Puisque  $f(z) = \lambda z + o(|z|)$  le résultat est vrai pour  $q = 2$ . Si on le suppose vrai au rang  $q - 1$ , on peut écrire  $f(z) = \lambda f_o(z) + o(|z|^{q-2})$  où  $f_o(z) = z e^{2i\pi Q(z\bar{z})}$  et où  $Q$  est un polynôme réel tel que  $2d^o Q + 1 < q - 1$ . Nous raisonnerons en termes de germes: deux difféomorphismes locaux de classe  $C^\infty$  fixant 0 sont équivalents s'ils coïncident sur un voisinage de 0. L'ensemble quotient  $\mathcal{I}$  est alors un groupe pour la loi de composition. Si  $h$  et  $h'$  sont deux éléments de  $\mathcal{I}$  nous dirons que  $h = h'[z^n]$  si les développements limités de  $h$  et de  $h'$  coïncident jusqu'à l'ordre  $n - 1$  (notons qu'ils définissent un élément de  $\mathcal{I}$ ). Si  $h''$  est un autre élément de  $\mathcal{I}$ , alors  $h \circ h'' = h' \circ h''[z^n]$  et

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

$h'' \circ h = h'' \circ h'[z^n]$ . En particulier  $h \circ h'^{-1}$ ,  $h'^{-1} \circ h$  et l'identité sont égaux modulo  $z^n$ .

Soit  $h_\lambda$  l'homothétie de rapport  $\lambda$ . Puisque  $f = h_\lambda \circ f_o[z^{q-1}]$  on peut écrire

$$f \circ f_o^{-1}(z) = \lambda z + R(z, \bar{z}) \pmod{[z^q]}$$

où  $R(z, \bar{z})$  est un polynôme homogène de degré  $q - 1$ .

LEMME 1. *Il existe un polynôme  $S(z, \bar{z})$  homogène de degré  $q - 1$  tel que l'élément de  $\mathcal{I}$  défini par la relation  $h^*(z) = z + S(z, \bar{z})$  vérifie:*

$$\begin{aligned} h^* \circ f \circ f_o^{-1} \circ h^{*-1}(z) &= \lambda z \pmod{[z^q]} \quad \text{si } q \text{ est impair} \\ &= \lambda z + A z^{n+1} \bar{z}^n \pmod{[z^q]} \quad \text{si } q \text{ est pair et si} \\ n &= \frac{q}{2} - 1 \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION: Si  $h^*(z) = z + S(z, \bar{z}) \pmod{[z^q]}$  alors  $h^{*-1}(z) = z - S(z, \bar{z}) \pmod{[z^q]}$  et donc:

$$\begin{aligned} f \circ f_o^{-1} \circ h^{*-1}(z) &= \lambda z - \lambda S(z, \bar{z}) + R(z, \bar{z}) \pmod{[z^q]} \\ h^* \circ f \circ f_o^{-1} \circ h^{*-1}(z) &= \lambda z - \lambda S(z, \bar{z}) + R(z, \bar{z}) + S(\lambda z, \bar{\lambda z}) \pmod{[z^q]}. \end{aligned}$$

Si l'on écrit:

$$R(z, \bar{z}) = \sum_{i+j=q-1} a_{ij} z^i \bar{z}^j \quad \text{et} \quad S(z, \bar{z}) = \sum_{i+j=q-1} b_{ij} z^i \bar{z}^j$$

le coefficient en  $z^i \bar{z}^j$  du polynôme

$$T(z, \bar{z}) = -\lambda S(z, \bar{z}) + R(z, \bar{z}) + S(\lambda z, \bar{\lambda z})$$

est  $a_{ij} + b_{ij} \lambda(-1 + \lambda^{i-j-1})$ .

Grâce à l'hypothèse faite sur  $\lambda$ , puisque  $i - j - 1$  varie entre  $-q$  et  $q - 2$  le coefficient de  $b_{ij}$  ne s'annule jamais quand  $q$  est impair et s'annule pour  $i = \frac{q}{2}$  dans le cas où  $q$  est pair. On peut donc trouver un polynôme vérifiant la conclusion du lemme.  $\square$

## Patrice Le Calvez

LEMME 2. *On a l'égalité*

$$h^* \circ f \circ h^{*-1}(z) = \lambda z e^{2i\pi P(z\bar{z})} \pmod{[z^q]}$$

où:  $P(X) = Q(X)$  si  $q$  est impair

et  $P(X) = Q(X) + \frac{1}{2i\pi\lambda} A X^n$  si  $q$  est pair et si  $n = \frac{q}{2} - 1$ .

DÉMONSTRATION: N'étudions que le cas où  $q$  est pair, l'autre étant identique

$$\begin{aligned} f_o \circ h(z) &= z e^{2i\pi Q(z\bar{z})} + S(z, \bar{z}) \pmod{[z^q]} \\ &= h \circ f_o(z) \pmod{[z^q]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h^* \circ f \circ h^{*-1} \circ f_o^{-1}(z) &= h^* \circ f \circ f_o^{-1} \circ h^{*-1}(z) \pmod{[z^q]} \\ &= \lambda z + A z^{n+1} \bar{z}^n \pmod{[z^q]} \\ &= \lambda z e^{2i\pi A'(z\bar{z})^n} \pmod{[z^q]} \end{aligned}$$

où  $A' = \frac{1}{2i\pi\lambda} A$ .

On en déduit

$$\begin{aligned} h^* \circ f \circ h^{*-1}(z) &= \lambda z e^{2i\pi Q(z\bar{z})} e^{2i\pi A'(f_o(z)\overline{f_o(z)})^n} \pmod{[z^q]} \\ &= \lambda z e^{2i\pi Q(z\bar{z})} e^{2i\pi A'(z\bar{z})^n} \pmod{[z]^q}. \end{aligned}$$

□

Le théorème 1.1 sera démontré après le lemme suivant.

LEMME 3. *Si  $q$  est impair, il existe un élément  $h$  de  $\mathcal{I}$ , préservant  $dx \wedge dy$  tel que  $h(z) = z + S(z, \bar{z}) \pmod{[z]^q}$ .*

*Si  $q$  est pair, d'une part  $A' = \frac{A}{2i\pi\lambda}$  est réel, d'autre part si le coefficient  $b_{n+1,n}$  de  $z^{n+1}\bar{z}^n$  dans  $S(z, \bar{z})$  est imaginaire pur, il existe  $h$  dans  $\mathcal{I}$  préservant  $dx \wedge dy$  tel que  $h(z) = z + S(z, \bar{z}) \pmod{[z]^q}$ .*

DÉMONSTRATION: Nous nous limiterons là encore au cas où  $q$  est pair.

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

Le développement réel de la fonction  $f \circ f_o^{-1} \circ h_\lambda^{-1}$  s'écrit:

$$\begin{cases} X &= x + U(x, y) + o((|x| + |y|)^q) \\ Y &= y + V(x, y) + o((|x| + |y|)^q) \end{cases}$$

où  $U$  et  $V$  sont des polynômes homogènes de degré  $q - 1$ . Le fait que la fonction préserve l'aire implique la relation

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

Puisque  $R$  vérifie l'égalité:

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial z} R(x + iy, x - iy) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + i \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right).$$

Le polynôme à gauche est un polynôme réel, ainsi:

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{1}{\bar{\lambda}} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{1}{\bar{\lambda}} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{z}}$$

est identiquement nul comme polynôme en  $(z, \bar{z})$ , ce qui donne

$$\sum_{i+j=q-1} i \frac{a_{ij}}{\lambda} z^{i-1} \bar{z}^j + i \frac{\bar{a}_{ij}}{\bar{\lambda}} \bar{z}^{i-1} z^j = 0.$$

Soit:

$$(i+1) \frac{a_{i+1,j}}{\lambda} + (j+1) \frac{\bar{a}_{j+1,i}}{\bar{\lambda}} = 0 \quad \text{si } i+j = q-2.$$

De cette relation on peut déjà déduire que  $\frac{A}{\lambda} = \frac{a_{n+1,n}}{\lambda}$  est imaginaire pur, et donc la première partie du lemme. D'autre part, puisque  $b_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{\lambda(1-\lambda^{i-j-1})}$  si  $(i,j) \neq (n+1,n)$ , on a:

$$(i+1)b_{i+1,j} + (j+1)\bar{b}_{j+1,i} = 0 \quad \text{si } i+j = q-2 \text{ et } i \neq j.$$

## Patrice Le Calvez

Si maintenant on suppose que  $b_{n+1,n}$  est imaginaire pur, la relation précédente sera vraie également par  $i = j$ , ce qui signifie que la forme réelle de  $h^*$

$$\begin{cases} X &= x + U^*(x, y) \\ Y &= y + V^*(x, y) \end{cases}$$

vérifie  $\frac{\partial U^*}{\partial x} + \frac{\partial V^*}{\partial y} = 0$ .

Pour construire une fonction  $h$  égale à  $h^*$  modulo  $[z^q]$  et préservant  $dx \wedge dy$  il suffit de considérer le difféomorphisme local  $(x, Y) \mapsto (X, y)$  défini par les relations:

$$\begin{cases} X &= x + U^*(x, Y) \\ y &= Y - V^*(x, Y) \end{cases}$$

On peut résoudre localement  $(X, Y)$  en fonction de  $(x, y)$ , on obtient:

$$\begin{cases} X &= x + U^*(x, y) + o((|x| + |y|)^{q-1}) \\ Y &= y + V^*(x, y) + o((|x| + |y|)^{q-1}) \end{cases}$$

et  $dY \wedge dX - dy \wedge dx = \left( \frac{\partial U^*}{\partial x} + 1 - 1 + \frac{\partial V^*}{\partial Y} \right) dY \wedge dx = 0$ .  $\square$

REMARQUE 1: Si on suppose que  $\lambda$  n'est pas racine de l'unité, on peut obtenir un difféomorphisme  $C^\infty$  local  $h$  fixant 0 et préservant l'aire et tel qu'à tout ordre on ait:

$$h \circ f \circ h^{-1}(z) = \lambda z e^{2i\pi P(z\bar{z})} + o(|z|^{q-1})$$

où  $P$  est un polynôme réel dont le degré vérifie  $2d^q P + 1 < q$ .

En fait la démonstration est purement formelle: si  $f(z) = \lambda z + \sum_{i \geq 2} R_i(z, \bar{z})$  est une série formelle, préservant formellement  $dx \wedge dy$  et

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

si  $\lambda$  n'est pas racine de l'unité, il existe une série formelle  $h(z) = z + \sum_{i \geq 2} S_i(z, \bar{z})$  préservant  $dx \wedge dy$  telle que  $h \circ f \circ h^{-1}(z) = \lambda z e^{2i\pi P(z\bar{z})}$

où  $P(X)$  est une série formelle réelle uniquement déterminée par  $f$ . Cependant même si la série converge (i.e. si  $f$  est analytique), ce ne sera généralement le cas ni de  $h$ , ni de  $P$ . Ainsi la dynamique de  $f$  au voisinage de 0 sera t-elle différente de celle beaucoup plus simple de sa forme normale.

REMARQUE 2: Les coefficients  $a_i$  obtenus dans le théorème ne dépendent que de  $f$  et s'appellent les invariants de Birkhoff. Chacun d'entre eux génériquement est non nul. Supposons que ce soit le cas de l'un d'entre eux, la forme normale laisse alors invariant chacun des cercles  $|z| = R$  et induit une rotation dont l'angle est une fonction de  $R$  strictement monotone au voisinage de 0. En coordonnées polaires  $z = r e^{2i\pi\theta}$  elle s'écrit

$$(\theta, r) \mapsto (\theta + \alpha + a_1 r^2 + \dots + a_n r^{2n}, r)$$

et définit un difféomorphisme de  $\mathbb{T}^1 \times [0, +\infty[$  qui dévie la verticale dans un voisinage de  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$  à l'exception du bord. Cette propriété est encore vérifiée pour la fonction  $g = h \circ f \circ h^{-1}$  qui s'écrit

$$g: (\theta, r) \mapsto (\theta + \alpha + a_1 r^2 + \dots + a_n r^{2n} + \mu(\theta, r), r + \nu(\theta, r))$$

où  $\mu$  et  $\nu$  sont des  $\mathcal{O}(|r|^{2n})$ .

### Remarque sur les différents exemples

Dans les trois derniers exemples, les applications obtenues ne sont généralement définies que sur une partie de l'anneau. Il arrive même qu'elles ne sont pas différentiables ou qu'elles ne dévient pas la verticale sur le bord de l'anneau où elles sont définies. Par la suite

## Patrice Le Calvez

nous n'étudierons que des applications définies sur l'anneau  $\mathbf{A}$  tout entier, le cadre d'étude étant plus facile, les résultats obtenus auront toujours leur analogue dans le cas d'anneaux bornés. D'autre part nous n'utiliserons le caractère différentiable de  $f$  que dans les cas où l'absence de cette hypothèse n'aurait pas de sens (étude locale de points fixes, variétés stables et instables) ainsi une grande partie des résultats est valable pour les homéomorphismes qui dévient la verticale.

## Chapitre 2

### LES ENSEMBLES d'AUBRY-MATHER

Reprenons l'étude d'un difféomorphisme  $C^\infty$  du plan préservant l'aire autour d'un point fixe elliptique générique. Il apparaît comme une perturbation d'une forme normale qui laisse chaque cercle  $r = \text{constant}$  invariant, avec un nombre de rotation qui dépend de façon monotone de  $r$ . C'est cette propriété qui permet d'obtenir le théorème de Kolmogorov, Arnold, Moser: il existe un grand nombre de courbes invariantes  $r = \psi(\theta)$  autour du point fixe, la densité de l'ensemble de ces courbes tendant vers un quand on s'approche du point fixe. Plus précisément les courbes invariantes de la forme normale dont le nombre de rotation est mal approché par les rationnels persistent. On verra que les autres courbes persistent sous une forme plus faible, sous la forme d'ensembles d'Aubry-Mather.

#### §1 Définition et propriétés des ensembles $f$ -ordonnés

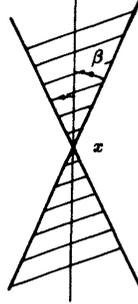
Nous considérons un élément  $f$  de  $\mathcal{K}$  et fixons un relèvement  $\tilde{f}$  de  $f$  à  $\tilde{\mathbf{A}}$ .

DÉFINITION 1: Une partie  $\Xi$  de  $\mathbf{A}$ , invariante par  $f$  est dite  $f$ -ordonnée si et seulement si:

- i) la restriction de  $p_1$  à  $\Xi$  est injective;
- ii) pour tout couple  $(x, x')$  d'éléments de  $\tilde{\Xi}$ ,  $p_1(x) < p_1(x') \Rightarrow p_1(\tilde{f}(x)) < p_1(\tilde{f}(x'))$ .

**Patrice Le Calvez**

REMARQUE: Si  $\Xi$  est  $f$ -ordonné et si  $\beta$  est l'angle caractérisant le fait que  $f$  dévie la verticale, la condition ii) vérifiée par  $\Xi$  implique que si  $x$  appartient à  $\tilde{\Xi}$ , l'ensemble hachuré ci-dessous ne contient pas d'autre point de  $\tilde{\Xi}$ .



Ainsi si  $x = (\theta, r)$  et  $x' = (\theta', r')$  sont deux points de  $\tilde{\Xi}$  on sait que  $|r - r'|$  est inférieur à  $\cotg \beta |\theta - \theta'|$ . On en déduit d'une part que  $\Xi$  est borné, d'autre part que la projection  $p_1$  est injective sur l'adhérence de  $\Xi$ . Le fait que cette adhérence vérifie la condition ii) écrite plus haut est alors évident. L'adhérence d'un ensemble  $f$ -ordonné est un ensemble compact  $f$ -ordonné, nous ne nous intéresserons plus qu'aux ensembles  $f$ -ordonnés compacts.

Si  $\Xi$  est un tel ensemble, la projection  $p_1$  induit un homéomorphisme entre  $\Xi$  et  $p_1(\Xi)$  et définit par conjugaison un homéomorphisme de  $p_1(\Xi)$ . La condition ii) exprime que celui-ci se prolonge en un homéomorphisme de  $T^1$  (par exemple par interpolation linéaire). Nous obtenons alors une définition équivalente des ensembles  $f$ -ordonnés.

DÉFINITION 2: Une partie  $\Xi$  de  $A$  est  $f$ -ordonnée si et seulement

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

si:

- i) la restriction de  $p_1$  à  $\Xi$  est injective,
- ii) il existe un homéomorphisme  $g: \mathbf{T}^1 \rightarrow \mathbf{T}^1$  tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{array}{ccc}
 \Xi & \xrightarrow{f} & \Xi \\
 p_1 \downarrow & & \downarrow p_1 \\
 \mathbf{T}^1 & \xrightarrow{g} & \mathbf{T}^1
 \end{array}$$

REMARQUE: Puisque  $f$  dévie la verticale, la condition i) est en fait une conséquence de la condition ii).

L'homéomorphisme  $g$  n'est bien déterminé que sur  $p_1(\Xi)$ , il n'est unique que si ce dernier ensemble est  $\mathbf{T}^1$ . Par contre son nombre de rotation ne dépend que de  $\Xi$ , c'est un élément de  $\mathbf{T}^1$  qui indique l'ordre dans lequel se placent autour de l'anneau les itérés d'un point de  $\Xi$ . De même, il existe un réel  $\rho_\Xi$  dépendant du relèvement  $\tilde{f}$  choisi, tel que pour tout point  $x$  de  $\tilde{\Xi}$  et tout entier  $k$ , on ait:

$$-1 < p_1(\tilde{f}^k(x)) - p_1(x) - k\rho_\Xi < 1.$$

On note  $\mathcal{X}$  l'ensemble des parties compactes de  $\mathbf{A}$  et  $\mathcal{X}(f)$  (que l'on note aussi  $\mathcal{X}(\tilde{f})$ ) l'ensemble des compacts  $f$ -ordonnés. On rappelle que l'ensemble  $\mathcal{X}$  peut être muni d'une distance  $D$  appelée distance de Hausdorff et définie de la manière suivante:

$$D(X, Y) = \max(\sup_{x \in X} d(x, Y), \sup_{y \in Y} d(y, X))$$

$$\text{où } d(x, Y) = \inf_{y \in Y} d(x, y).$$

On a les résultats suivants (voir A. Katok [K] ou R. Douady [D]).

**Patrice Le Calvez**

**PROPOSITION 2.1.** Soit  $(\tilde{f}_n)_{n \geq 0}$  une suite de  $\tilde{\mathcal{K}}$  convergeant vers  $\tilde{f}$  et  $(\Xi_n)_{n \geq 0}$  une suite de  $\mathcal{X}$ , telle que pour tout entier  $n$ ,  $\Xi_n$  soit contenu dans  $\mathcal{X}(f_n)$ , alors:

i) si la suite  $(\rho_{\Xi_n})_{n \geq 0}$  est bornée, il en est de même de la suite  $(\Xi_n)_{n \geq 0}$

ii) si la suite  $(\Xi_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $\Xi$ , cet ensemble appartient à  $\mathcal{X}(\tilde{f})$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_{\Xi_n} = \rho_{\Xi}$ .

**DÉMONSTRATION:** i) Soit  $M$  un réel tel que pour tout  $n \geq 0$  on ait  $-M \leq \rho_{\Xi_n} \leq M$ . Puisque  $\tilde{f}$  dévie la verticale à droite, il existe un réel  $N$  tel que pour tout  $x$  dans  $\mathbf{R} \times \{N\}$  (resp.  $\mathbf{R} \times \{-N\}$ ) on a  $p_1(\tilde{f}(x)) - p_1(x) > M + 1$  (resp.  $p_1(\tilde{f}(x)) - p_1(x) < -M - 1$ ). Puisque  $(\tilde{f}_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $\tilde{f}$ , ces deux relations sont encore vraies avec  $\tilde{f}_n$  dès que  $n$  est grand et, comme ces applications dévient la verticale à droite, on a  $p_1(\tilde{f}_n(x)) - p_1(x) > M + 1$  (resp.  $p_1(\tilde{f}_n(x)) - p_1(x) < -M - 1$ ) pour tout  $x$  dans  $\mathbf{R} \times [N, +\infty[$  (resp.  $\mathbf{R} \times ]-\infty, -N]$ ). Ainsi, dès que  $n$  est assez grand,  $\Xi_n$  est contenu dans  $\mathbf{T}^1 \times [-N, N]$ .

ii) Supposons maintenant que la suite  $(\Xi_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $\Xi$ . Soit  $x = (\theta, r)$  et  $x' = (\theta', r')$  deux points de  $\tilde{\Xi}$  tels que  $\theta = \theta'$  et  $r < r'$ . On a

$$p_1(\tilde{f}^{-1}(x')) < p_1(\tilde{f}^{-1}(x)) \quad \text{et} \quad p_1(\tilde{f}(x')) > p_1(\tilde{f}(x)).$$

On peut construire deux suites  $(x_n)_{n \geq 0}$  et  $(x'_n)_{n \geq 0}$ , formées pour tout  $n$  d'un élément de  $\Xi_n$ , convergeant respectivement vers  $x$  et  $x'$ . La suite  $(\tilde{f}_n(x_n))_{n \geq 0}$  (resp.  $(\tilde{f}_n(x'_n))_{n \geq 0}$ ,  $(\tilde{f}_n^{-1}(x_n))_{n \geq 0}$ ,  $(\tilde{f}_n^{-1}(x'_n))_{n \geq 0}$ ) converge vers  $\tilde{f}(x)$  (resp.  $\tilde{f}(x')$ ,  $\tilde{f}^{-1}(x)$ ,  $\tilde{f}^{-1}(x')$ ). Ainsi dès que  $n$  est assez grand on a:

$$p_1(\tilde{f}_n^{-1}(x'_n)) < p_1(\tilde{f}_n^{-1}(x_n)) \quad \text{et} \quad p_1(\tilde{f}_n(x'_n)) > p_1(\tilde{f}_n(x_n))$$

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

ce qui contredit le fait que  $\Xi_n$  soit  $\tilde{f}_n$ -ordonné. On sait donc que  $p_1$  est injective sur  $\Xi$ , on montre de même que  $\tilde{f}$  préserve sur  $\tilde{\Xi}$  l'ordre défini par  $p_1$ .

Il reste à montrer que la suite  $(\rho_{\Xi_n})_{n \geq 0}$  converge vers  $\rho_{\Xi}$ . Fixons  $k$  dans  $\mathbf{N}$  et  $x$  dans  $\tilde{\Xi}$ . Puisque  $-1 < p_1(\tilde{f}^k(x)) - p_1(x) - k\rho_{\Xi} < 1$ , on peut trouver pour  $n$  assez grand un point  $x_n$  de  $\Xi_n$  assez proche de  $x$  pour que  $-1 < p_1(\tilde{f}_n^k(x_n)) - p_1(x) - k\rho_{\Xi} < 1$ . Comme cette relation est vraie avec  $\rho_{\Xi_n}$  au lieu de  $\rho_{\Xi}$  on en déduit que  $|\rho_{\Xi_n} - \rho_{\Xi}|$  est inférieur à  $\frac{2}{k}$  dès que  $n$  est assez grand.  $\square$

En appliquant cette proposition au cas où la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  est constante et en utilisant le fait que toute partie bornée de  $\mathcal{X}$  est relativement compacte, on obtient le résultat suivant.

**PROPOSITION 2.2:** L'application de  $\mathcal{X}(f)$  dans  $\mathbf{R}$  qui associe à un ensemble  $f$ -ordonné son nombre de rotation pour un relèvement  $\tilde{f}$  fixé est continue et propre. Son image que l'on note  $\mathcal{R}(\tilde{f})$  est un ensemble fermé de  $\mathbf{R}$ .

Étudions maintenant deux cas particuliers d'ensembles  $f$ -ordonnés.

### Les graphes invariants

L'application de  $\mathcal{X}(f)$  dans l'ensemble des fermés de  $\mathbf{T}^1$  qui à  $\Xi$  associe  $p_1(\Xi)$  est continue pour la distance de Hausdorff, ainsi l'image réciproque de  $\{\mathbf{T}^1\}$  pour cette application est une partie fermée  $\mathcal{X}'(f)$  de  $\mathcal{X}(f)$  et donc de  $\mathcal{X}$ , c'est l'ensemble des graphes d'applications continues de  $\mathbf{T}^1$  dans  $\mathbf{R}$  invariants par  $f$ , que l'on appellera plus simplement l'ensemble des graphes invariants. La restriction de  $\tilde{\rho}$  à  $\mathcal{X}'(f)$  est alors continue et propre et son image  $\mathcal{R}'(f)$  est un ensemble fermé de  $\mathbf{R}$ , c'est l'ensemble des nombres de rotation des graphes invariants. Si  $\Xi$  est un graphe invariant et si  $\Xi'$  est un ensemble  $f$ -ordonné situé au dessus de  $\Xi$  (resp. au

## Patrice Le Calvez

dessous de  $\Xi$ ), son nombre de rotation est supérieur (resp. inférieur) ou égal à celui de  $\Xi$ , ceci parce que  $f$  dévie la verticale à droite. En particulier les graphes invariants sont ordonnés comme leurs nombres de rotation. On sait également que si un graphe invariant a un nombre de rotation irrationnel, c'est le seul à avoir ce nombre (Herman [He]).

### Les ensembles d'Aubry-Mather

L'application  $f$  se comporte sur un ensemble  $f$ -ordonné  $\Xi$  comme un homéomorphisme du cercle. Ainsi l'ensemble  $\alpha$ -limite, de même que l'ensemble  $\omega$ -limite d'un point  $x$  de  $\Xi$  est un ensemble fermé  $f$ -ordonné minimal. Si le nombre de rotation est rationnel c'est une orbite périodique bien-ordonnée (ce que l'on appelle une orbite de Birkhoff), s'il est irrationnel, c'est soit un ensemble de Cantor, soit le graphe d'une fonction continue de  $\mathbf{T}^1$  dans  $\mathbf{R}$ . Un ensemble fermé  $f$ -ordonné et minimal sera appelé un ensemble d'Aubry-Mather.

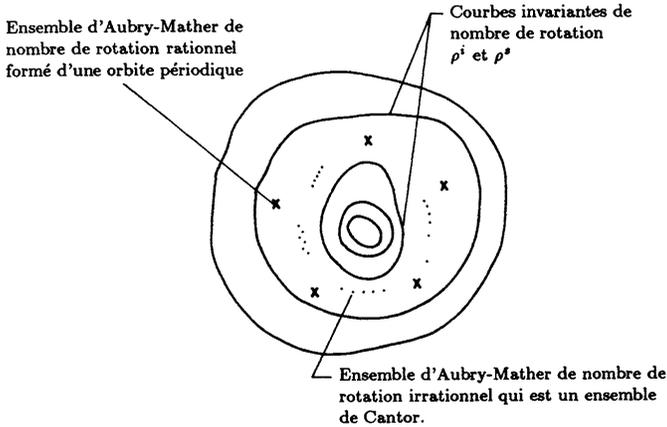
## §2 Théorie de S. Aubry et de J. Mather

Du paragraphe précédent nous déduisons que les courbes invariantes au voisinage d'un point fixe elliptique générique d'un difféomorphisme du plan préservant l'aire forment un ensemble fermé, en particulier un grand nombre d'entre elles ne sont pas obtenues directement par le théorème K.A.M mais comme limites de ces courbes. On peut montrer que génériquement il n'y a pas de courbe invariante de nombre de rotation rationnel (on verra une démonstration au §4), aussi les courbes invariantes sont uniquement déterminées par leur nombre de rotation et s'ordonnent comme ceux-ci autour du point fixe. En particulier il existe des régions

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

annulaires bordées par des courbes invariantes de nombre de rotation  $\rho^i \neq \rho^o$  et n'admettant aucune courbe invariante. Ces régions s'appellent des régions d'instabilité, c'est dans celles-ci que la dynamique de  $f$  est compliquée, nous l'étudierons plus précisément au Chapitre 5.

Nous allons voir dans ce paragraphe que les courbes invariantes de la forme normale de  $f$  dont le nombre de rotation est entre  $\rho^i$  et  $\rho^o$ , qui ont disparu persistent cependant sous une forme affaiblie, sous forme d'ensembles d'Aubry-Mather: pour tout nombre  $\rho$  entre  $\rho^i$  et  $\rho^o$  il existe un ensemble d'Aubry-Mather dont c'est le nombre de rotation dans la région d'instabilité. On obtient la figure suivante.



Les démonstrations originales de S. Aubry et de J. Mather de ce résultat sont différentes mais utilisent toutes deux une méthode variationnelle, en particulier la notion d'orbite maximisante. Nous avons comme parti-pris d'insister sur les propriétés topologiques des applications déviant la verticale et laisserons donc de côté la

## Patrice Le Calvez

majeure partie de cette théorie que l'on pourra trouver dans les références suivantes ([AL], [Ma 1], [Ma 5], [Che], [MS]). Nous donnerons cependant une idée de ces méthodes en donnant une démonstration du résultat, due à Mather et à Katok [Ma 5] et qui généralise une idée de Birkhoff sur le billard [Bi 2]. Dans notre cadre d'étude (et on peut toujours plus ou moins s'y ramener, voir Chenciner [Che] pour l'exemple des points fixes élliptiques), le théorème s'énonce ainsi.

**THÉORÈME 2.1.** *Si  $f$  appartient à  $\mathcal{K}$  et si  $f^*(rd\theta) - rd\theta$  est une forme exacte, alors  $\mathcal{R}(\tilde{f}) = \mathbf{R}$  pour tout relèvement  $\tilde{f}$  de  $f$  à  $\tilde{\mathbf{A}}$ .*

**REMARQUE:** Dire que  $f^*(rd\theta) - rd\theta$  est exacte signifie que  $f$  préserve la forme volume  $d\theta \wedge dr$  et que son flux de Calabi est égal à 0. En effet l'aire algébrique comprise entre  $C$  et  $f(C)$ , où  $C$  est une courbe de classe  $C^1$  séparant l'anneau n'est rien d'autre que l'intégrale de  $f^*(rd\theta) - rd\theta$  sur  $C$ . En particulier cette condition sera vérifiée si  $f$  préserve l'aire et a un graphe invariant, en particulier si elle a une région d'instabilité.

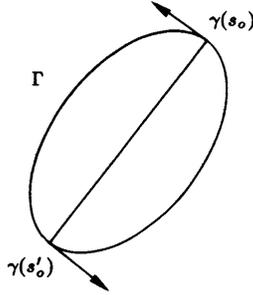
Puisque  $\mathcal{R}(\tilde{f})$  est fermé, le théorème 2.1 est une conséquence du résultat plus précis suivant ([Ma 5]).

**PROPOSITION 2.3.** *Si  $p \in \mathbf{Z}$  et  $q \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$  sont premiers entre eux, il existe un ensemble  $f$ -ordonné de nombre de rotation  $\frac{p}{q}$ , formé de deux orbites périodiques.*

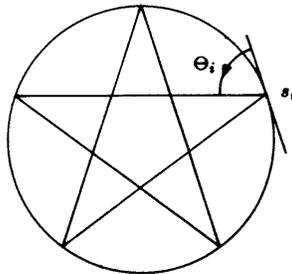
Avant de montrer ce résultat, illustrons sa preuve dans le cas du billard. Considérons un billard convexe défini par une courbe  $\Gamma$  et représenté par un homéomorphisme  $f$  de  $T^1 \times [0, \pi]$ . Parmi toutes les cordes de  $\Gamma$ , il y en a une au moins de longueur maximale qui joint deux points  $\gamma(s_o)$  et  $\gamma(s'_o)$ . Cette corde est perpendiculaire à la tangente à chacune de ces extrémités, en d'autres termes l'ensemble

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

$\{(s_0, \frac{\pi}{2}), (s'_0, \frac{\pi}{2})\}$  est un ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation  $\frac{1}{2}$ .

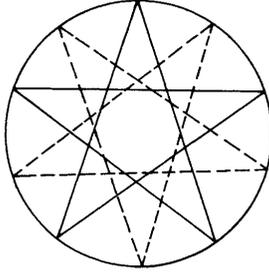


L'argument se généralise pour n'importe quel nombre de rotation  $\rho = \frac{p}{q}$  compris entre 0 et 1. On considère  $q$  points sur  $\Gamma$  que l'on ordonne dans le même ordre qu'une rotation d'angle  $\frac{p}{q}$  et on trace la corde joignant un point à son suivant. Parmi toutes les étoiles polygônales obtenues, il y en a au moins une de longueur maximale, elle est non dégénérée (les  $q$  sommets sont distincts) et en chaque sommet  $\gamma(s_i)$  les deux cordes aboutissant en  $\gamma(s_i)$  font un même angle  $\theta_i$  avec la tangente en ce point. L'ensemble  $\{(s_i, \theta_i), 1 \leq i \leq q\}$  est un ensemble d'Aubry-Mather de  $f$  de nombre de rotation  $\frac{p}{q}$ .



## Patrice Le Calvez

On obtient la seconde orbite par un procédé de type minimax en déplaçant tous les sommets vers la gauche jusqu'à retrouver la même étoile et en essayant de minimiser l'écart de longueur.



L'outil fondamental dans ce qui précède est la fonction  $\ell: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $(s, s') \mapsto \|\gamma(s) - \gamma(s')\|$ , nous aurons toujours une telle fonction dans le cas général: la fonction génératrice.

**DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION:** Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{K}$  vérifiant les hypothèses de la proposition et  $\tilde{f}$  un relèvement de  $f$  à  $\tilde{\mathbf{A}}$ . Puisque  $f$  dévie la verticale, dans l'expression,  $(\theta', r') = \tilde{f}(\theta, r)$  on peut exprimer  $r$  en fonction de  $\theta$  et  $\theta'$ , puis faire de même pour  $r'$ . Il existe deux applications  $g$  et  $g'$  de  $\mathbf{R}^2$  dans  $\mathbf{R}$ , de classe  $C^1$  telles que:

$$(\theta', r') = \tilde{f}(\theta, r) \Leftrightarrow r = g(\theta, \theta') \quad \text{et} \quad r' = g'(\theta, \theta').$$

De plus, l'application  $(\theta, \theta') \mapsto (\theta, g(\theta, \theta'))$  est un difféomorphisme et l'on peut considérer le couple  $(\theta, \theta')$  comme un système de coordonnées de la variété  $\tilde{\mathbf{A}}$ . Deux points  $(\theta_1, \theta'_1)$  et  $(\theta_2, \theta'_2)$

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

définissent alors le même élément de  $A$  si et seulement si

$$(\theta_1, \theta'_1) = (\theta_2, \theta'_2) + k(1, 1), \quad \text{où } k \in \mathbf{A}.$$

Le fait que la forme  $rd\theta - f^*(rd\theta)$  soit exacte s'interprète dans ce système de coordonnées sous la forme suivante:

il existe une application  $h: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $(\theta, \theta') \mapsto h(\theta, \theta')$  de classe  $C^2$ , telle que pour tout  $(\theta, \theta') \in \mathbf{R}^2$  on ait:

$$\begin{cases} h(\theta + 1, \theta' + 1) = h(\theta, \theta') \\ r = g(\theta, \theta') = \frac{\partial h}{\partial \theta}(\theta, \theta') \\ r' = g'(\theta, \theta') = -\frac{\partial h}{\partial \theta'}(\theta, \theta') \end{cases}$$

et comme  $f$  dévie la verticale à droite  $\frac{\partial^2 h}{\partial \theta \partial \theta'}(\theta, \theta') > 0$ .

Pour simplifier l'écriture, on écrira  $h_1, h_2, h_{12}$ , etc... pour  $\frac{\partial h}{\partial \theta}$ ,  $\frac{\partial h}{\partial \theta'}$ ,  $\frac{\partial^2 h}{\partial \theta \partial \theta'}$ , etc....

Montrons que si  $p \in \mathbf{Z}$  et  $q \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$  sont premiers entre eux il existe un ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation  $\frac{p}{q}$ , pour cela commençons par identifier  $\mathbf{R}^q$  et l'ensemble  $\mathcal{S}$  des suites  $(\theta_i)_{i \in \mathbf{Z}}$  vérifiant  $\theta_{i+q} = \theta_i + p$  et notons  $\mathcal{S}_{p/q}$  l'ensembles des suites  $(\theta_i)_{i \in \mathbf{Z}}$  vérifiant:

$$(1) \quad \begin{cases} \theta_{i+q} = \theta_i + p \\ i\frac{p}{q} + j \leq i'\frac{p}{q} + j' \Rightarrow \theta_i + j \leq \theta_{i'} + j'. \end{cases}$$

C'est un ensemble affine de  $\mathbf{R}^q$ , homéomorphe à  $\mathbf{R} \times [0, 1]^{q-1}$  dont l'intérieur est défini par les relations suivantes:

$$(1)^* \quad \begin{cases} \theta_{i+q} = \theta_i + p \\ i\frac{p}{q} + j < i'\frac{p}{q} + j' \Rightarrow \theta_i + j < \theta_{i'} + j'. \end{cases}$$

## Patrice Le Calvez

Nous allons montrer l'existence d'une suite  $(\theta_i)_{i \in \mathbf{Z}}$  de l'intérieur de  $\mathcal{S}_{p/q}$  vérifiant:

$$h_2(\theta_{i-1}, \theta_i) + h_1(\theta_i, \theta_{i+1}) = 0, \quad \text{pour tout entier } i.$$

L'ensemble  $\{(\theta_i, r_i) \mid i \in \mathbf{Z}\}$  où  $r_i = h_1(\theta_i, \theta_{i+1}) = -h_2(\theta_{i-1}, \theta_i)$  sera alors une orbite de  $\tilde{f}$  qui se projette dans  $\mathbf{A}$  en un ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation  $\frac{p}{q}$ .

Considérons la fonction:

$$H: \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{R}, \quad \theta^* = (\theta_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mapsto \sum_{i=0}^{q-1} h(\theta_i, \theta_{i+1}) = h(\theta^*).$$

Puisque  $h(\theta, \theta') = h(\theta + 1, \theta' + 1)$  on peut écrire

$$H((\theta_i)_{i \in \mathbf{Z}}) = \sum_{i=k}^{q-1+k} h(\theta_i, \theta_{i+1}) \quad \text{par tout entier } k.$$

La fonction  $H$  est de classe  $C^2$  et ses points critiques sont les suites  $(\theta_i)_{i \in \mathbf{Z}}$  telles que  $h_2(\theta_{i-1}, \theta_i) + h_1(\theta_i, \theta_{i+1}) = 0$ . Nous cherchons à maximiser  $H$  sur  $\mathcal{S}_{p/q}$ .

**LEMME 1.** *La fonction  $H$  admet un maximum sur  $\mathcal{S}_{p/q}$ .*

**DÉMONSTRATION:** L'ensemble

$$\mathcal{S}_{p/q}^\circ = \{(\theta_i)_{i \in \mathbf{Z}} \in \mathcal{S}_{p/q} \mid 0 \leq \theta_0 \leq 1\}$$

est compact. Puisque  $h(\theta, \theta') = h(\theta + 1, \theta' + 1)$ , nous avons  $\text{Sup}_{\mathcal{S}_{p/q}} H =$

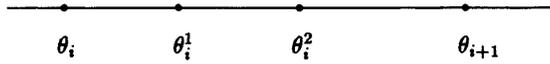
$\text{Sup}_{\mathcal{S}_{p/q}^\circ} H$ , ainsi le lemme est démontré. □

$\mathcal{S}_{p/q}^\circ$

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

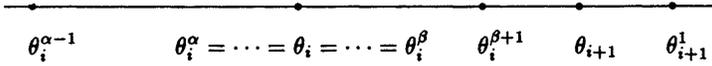
LEMME 2. *Le maximum de  $H$  n'est pas sur la frontière de  $\mathcal{S}_{p/q}$ .*

DÉMONSTRATION: Soient  $i_o$  et  $j_o$  deux entiers tels que  $i_o p + j_o q = 1$ . On définit pour toute suite  $(\theta_i)_{i \in \mathbf{Z}}$  de  $\mathcal{S}_{p/q}$ , la suite  $(\theta_i^1)_{i \in \mathbf{Z}}$  par la relation  $\theta_i^1 = \theta_{i+i_o} + j_o$  et plus généralement la suite  $(\theta_i^k)_{i \in \mathbf{Z}}$  par la relation  $\theta_i^k = \theta_{i+k i_o} + k j_o$ . ( $\theta_i^1$  n'est rien d'autre que le plus petit élément de l'intersection de  $\{\theta_{i'} + j \mid i', j \in \mathbf{Z}\}$  et de  $[\theta_i, +\infty[$ ).



Si  $(\theta_i)_{i \in \mathbf{Z}}$  appartient à la frontière de  $\mathcal{S}_{p/q}$  il existe  $i \in \mathbf{Z}$  tel que  $\theta_i = \theta_i^1$  et, comme  $\theta_{q+i} = \theta_i + p$ , il existe  $j \in \mathbf{Z}$  tel que  $\theta_j \neq \theta_j^1$ . On peut donc choisir  $i \in \mathbf{Z}$  tel que  $\theta_i = \theta_i^1$  et  $\theta_{i+1} < \theta_{i+1}^1$ . De même il existe deux entiers  $\alpha$  et  $\beta$  où  $\alpha \leq 0 < \beta$  tels que:

$$\theta_i^{\alpha-1} < \theta_i^\alpha = \theta_i = \theta_i^\beta < \theta_i^{\beta+1}$$



Des inégalités

$$h_{12} > 0; \quad \theta_{i-1}^\alpha \leq \theta_{i-1}^\beta; \quad \theta_{i+1}^\alpha \leq \theta_{i+1} < \theta_{i+1}^1 \leq \theta_{i+1}^\beta,$$

on en déduit

$$h_2(\theta_{i-1}^\alpha, \theta_i^\alpha) + h_1(\theta_i^\alpha, \theta_{i+1}^\alpha) < h_2(\theta_{i-1}^\beta, \theta_i^\beta) + h_1(\theta_i^\beta, \theta_{i+1}^\beta).$$

La fonction  $H$  prend la même valeur sur les suites  $(\theta_i^k)_{i \in \mathbf{Z}}$ . Le terme de gauche représente la dérivée partielle de  $H$  en  $(\theta_i^k)_{i \in \mathbf{Z}}$  par

## Patrice Le Calvez

rapport à  $\theta_i^\alpha$ . S'il est strictement négatif on obtient un élément de  $\mathcal{S}_{p/q}$  où  $H$  a une valeur plus grande en diminuant légèrement  $\theta_i^\alpha$ . S'il est positif, le terme de droite est strictement positif et on obtient de même un élément de  $\mathcal{S}_{p/q}$  où la valeur de  $H$  est plus grande en augmentant légèrement  $\theta_i^\beta$ .  $\square$

Le maximum de la fonction  $H$  est donc atteint en un point de l'intérieur de  $\mathcal{S}_{p/q}$ , c'est-à-dire en un point critique  $(\bar{\theta}_i)_{i \in \mathbf{Z}}$  de  $H$ . Pour trouver un second point critique, nous allons utiliser un procédé de type minimax. Nous considérons l'ensemble  $\hat{\mathcal{S}}_{p/q}$  des suites de  $\mathcal{S}_{p/q}$  vérifiant:

$$\bar{\theta}_i \leq \theta_i \leq \bar{\theta}_i^1 \quad \text{pour tout } i \in \mathbf{Z}.$$

C'est un ensemble affine de  $\mathbf{R}^q$ , homéomorphe à  $[0, 1]^q$ .

LEMME 3. *Pour toute suite  $\theta^*$  de la frontière de  $\hat{\mathcal{S}}_{p/q}$  distincte de  $\bar{\theta}^* = (\bar{\theta}_i)_{i \in \mathbf{Z}}$  et  $\bar{\theta}^{*1} = (\bar{\theta}_i^1)_{i \in \mathbf{Z}}$ , il existe une application  $F: \hat{\mathcal{S}}_{p/q} \rightarrow \hat{\mathcal{S}}_{p/q}$  telle que:*

- i)  $\forall \theta^{*'} \in \hat{\mathcal{S}}_{p/q} \quad H(F(\theta^{*'})) \geq H(\theta^{*'})$
- ii)  $\forall \theta^{*'} \in \hat{\mathcal{S}}_{p/q} \quad H(F(\theta^{*'})) = H(\theta^{*'}) \Leftrightarrow F(\theta^{*'}) = \theta^{*'}$
- iii)  $H(F(\theta^*)) > H(\theta^*)$ .

DÉMONSTRATION: Puisque  $\theta^*$  est dans la frontière de  $\hat{\mathcal{S}}_{p/q}$  et distincte de  $\bar{\theta}^*$  et de  $\bar{\theta}^{*1}$ , il existe un entier  $i$  tel que  $\theta_i = \bar{\theta}_i$  et  $\theta_{i+1} > \bar{\theta}_{i+1}$  ou alors tel que  $\theta_i = \bar{\theta}_i^1$  et  $\theta_{i+1} < \bar{\theta}_{i+1}$ . Nous n'étudions que le premier cas.

Des inégalités

$$h_{12} > 0; \quad \bar{\theta}_{i-1} \leq \theta_{i-1}; \quad \bar{\theta}_{i+1} < \theta_{i+1}$$

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

on peut déduire

$$h_2(\bar{\theta}_{i-1}, \bar{\theta}_i) + h_1(\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{i+1}) < h_2(\theta_{i-1}, \theta_i) + h_1(\theta_i, \theta_{i+1}).$$

Le terme à gauche étant nul par hypothèse, on en déduit que la dérivée partielle de  $H$  en  $\theta^*$  par rapport à  $\theta_i$  est strictement positive et donc qu'en augmentant  $\theta_i$  on augmente  $H$ . Il suffit de faire ce déplacement de façon continue dans un voisinage de  $\theta$  pour obtenir l'application  $F$  demandée.  $\square$

### Fin de la démonstration de la proposition.

Remarquons que la conclusion du lemme est encore vraie si  $\theta^*$  est dans l'intérieur de  $\hat{\mathcal{S}}_{p/q}$  et n'est pas un point critique de  $H$ , il suffit en effet d'intégrer le champ  $\eta(\theta^*) \overrightarrow{\text{grad}} H(\theta^*)$  où  $\eta: \hat{\mathcal{S}}_{p/q} \rightarrow \mathbf{R}$  est de classe  $C^1$  et nulle en dehors d'un voisinage de  $\theta^*$ .

Les ensembles  $W_a = H^{-1}([a, +\infty]) \cap \hat{\mathcal{S}}_{p/q}$  sont compacts et décroissent quand  $a$  croît. Il existe donc  $a_o \leq H(\bar{\theta}^*)$  tel que:

- $\bar{\theta}^*$  et  $\bar{\theta}^{*1}$  sont dans la même composante connexe de  $W_{a_o}$ .
- $\bar{\theta}^*$  et  $\bar{\theta}^{*1}$  ne sont plus dans la même composante connexe de  $W_a$ , si  $a > a_o$ .

Si  $a_o = H(\bar{\theta}^*)$ , la fonction  $H$  atteint son maximum non seulement en  $\bar{\theta}^*$  et  $\bar{\theta}^{*1}$  mais en beaucoup d'autres points qui sont tous des points critiques.

Si  $a_o < H(\bar{\theta}^*)$  et s'il n'y a aucun point critique dans l'intersection de  $H^{-1}(\{a_o\})$  et de l'intérieur de  $\hat{\mathcal{S}}_{p/q}$  on peut construire pour tout point de  $H^{-1}(\{a_o\}) \cap \hat{\mathcal{S}}_{p/q}$  une fonction  $F_{\theta^*}$  définie par le lemme 3 et un ouvert  $U_{\theta^*}$  sur lequel  $H \circ F_{\theta^*}$  est strictement plus grand que  $H$ . On considère ensuite un recouvrement fini  $U_{\theta^*_1}, \dots, U_{\theta^*_n}$  du compact  $H^{-1}(\{a_o\}) \cap \hat{\mathcal{S}}_{p/q}$ . L'application

## Patrice Le Calvez

$F = F_{\theta'_c} \circ \dots \circ F_{\theta'_n}$  est continue, laisse fixe  $\bar{\theta}^*$  et  $\bar{\theta}^{*1}$  et envoie la composante connexe  $W'_{a_0}$  de  $W_{a_0}$  contenant  $\bar{\theta}^*$  et  $\bar{\theta}^{*1}$  dans une composante connexe de  $W_a$  où  $a$  est strictement supérieur à  $a_0$ . On a obtenu une contradiction.  $\square$

### §3 Structure des orbites périodiques

Nous continuons l'étude des deux orbites obtenues plus haut pour savoir entre autres si elles sont plutôt du type hyperbolique ou plutôt du type élliptique (voir [Ma 4] ou [MS]). Gardons les mêmes notations.

Soit  $\theta^* = (\theta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  un point critique de  $H$  dans l'intérieure de  $\mathcal{S}_{p/q}$ , on pose

$$r_i = h_1(\theta_i, \theta_{i+1}) = -h_2(\theta_{i-1}, \theta_i) \text{ et } x_i = (\theta_i, r_i) \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

La suite  $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  est une orbite de  $\tilde{f}$  qui définit un ensemble d'Aubry-Mather dans  $\tilde{\mathcal{A}}$ , cherchons les valeurs propres de  $D\tilde{f}_{x_0}^q$ . Pour cela fixons  $\vec{v}_0$  dans le plan tangent à  $\tilde{\mathcal{A}}$  en  $x_0$  et posons  $\vec{v}_i = D\tilde{f}_{x_0}^q(\vec{v}_0)$ . Dans le système de coordonnées  $(\theta, \theta')$ , la fonction  $f$  s'écrit

$$f(\theta, \theta') = (\theta', \theta'') \quad \text{où} \quad h_2(\theta, \theta') + h_1(\theta', \theta'') = 0,$$

dans le système associé sur le fibré tangent de  $\tilde{\mathcal{A}}$ , l'application  $Df$  s'écrit

$$Df(\theta, \theta', \Theta, \Theta') = (\theta', \theta'', \Theta', \Theta'')$$

où

$$\begin{cases} h_2(\theta, \theta') + h_1(\theta', \theta'') = 0 \\ \Theta h_{12}(\theta, \theta') + \Theta'(h_{22}(\theta, \theta') + h_{11}(\theta', \theta'')) + \Theta'' h_{12}(\theta, \theta') = 0. \end{cases}$$

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

Ainsi si on note  $h_{12}^i, h_{22}^i, h_{11}^i$  les valeurs respectives des fonctions  $h_{12}, h_{22}$  et  $h_{11}$  en  $(\theta_i, \theta_{i+1})$ , les coordonnées  $(\Theta_i, \Theta'_i)$  de  $\vec{v}_i$  sont liées par les relations

$$\begin{cases} \Theta'_i = \Theta_{i+1} \\ \Theta_i h_{12}^i + \Theta_{i+1}(h_{22}^i + h_{11}^{i+1}) + \Theta_{i+2} h_{12}^{i+1} = 0. \end{cases}$$

Résoudre  $Df_{x_0}^q(\vec{v}_0) = \lambda \vec{v}_0$ , c'est résoudre l'équation

$$\Theta_{q+1} = \lambda \Theta_i \quad \text{pour tout entier } i,$$

ce qui s'écrit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} h_{22}^0 + h_{11}^1 & h_{12}^1 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda} h_{12}^0 \\ h_{12}^1 & h_{22}^1 + h_{11}^2 & h_{12}^2 & & 0 & 0 \\ 0 & h_{12}^2 & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & & & h_{12}^{q-1} & \\ \lambda h_{12}^0 & 0 & \dots & 0 & h_{12}^{q-1} & h_{22}^{q-1} + h_{11}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \vdots \\ \Theta_q \end{pmatrix} = 0$$

Les valeurs propres de  $Df_{x_0}^q$  sont les solutions de l'équation  $\det M(\lambda) = 0$  où  $M(\lambda)$  est la matrice précédente. Développons ce déterminant, il est de la forme  $A\lambda + \frac{B}{\lambda} + C$  avec

$$A = B = (-1)^{q-1} \prod_{i=0}^{q-1} h_{12}^i.$$

On peut donc écrire:  $\det M(\lambda) = A(\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2) + \det M(1)$ . Ainsi

$$\det M(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{\lambda} - 2 = \frac{(-1)^q}{\prod_{i=0}^{q-1} h_{12}^i} \det M(1).$$

Or d'une part tous les  $h_{12}^i$  sont strictement positifs, d'autre part  $M(1)$  est la matrice Hessienne de  $H$  en  $\theta^*$ . Ainsi si  $\theta^*$  correspond

## Patrice Le Calvez

au maximum de  $H$ ,  $\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2$  est positif, les valeurs propres sont réelles positives et inverses l'une de l'autre. Si  $\theta$  correspond à une orbite minimax, la matrice Hessienne est de signature  $(1, q - 1)$  ou alors dégénérée et  $\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2$  est négatif (pour être plus précis on peut trouver dans  $H^{-1}(\{a_o\}) \cap \hat{\mathcal{S}}_{p/q}$  un point avec ces propriétés); les deux racines sont toutes les deux sur le cercle unité, ou alors réelles négatives et inverses l'une de l'autre.

Dans le cas où 1 n'est pas valeur propre de  $Df_{x_o}^q$ , la première orbite est hyperbolique sans réflexion (d'indice -1), la seconde est soit élliptique, soit hyperbolique avec réflexion (dans les deux cas d'indice +1).

### §4 Propriétés génériques des ensembles d'Aubry-Mather

Nous nous intéressons dans ce paragraphe aux deux problèmes suivants:

- i) l'orbite périodique de type minimax est-elle généralement élliptique ou généralement hyperbolique?
- ii) il y a t'il des ensembles d'Aubry-Mather de nombre de rotation irrationnels qui sont hyperboliques?

D. Goroff [G] et M. Herman ont construit des difféomorphismes explicites dont tous les ensembles d'Aubry-Mather de nombre de rotation irrationnels étaient hyperboliques. Ces difféomorphismes coïncident avec une application linéaire hyperbolique sur une grande partie de l'anneau et se trouvent loin pour la  $C^1$ -topologie de l'application standard définie par la relation  $\tilde{f}_o(\theta, r) = (\theta + r, r)$ . Nous allons voir que si  $f$  vérifie des conditions génériques de transversalité, on retrouve localement cette situation (c'est-à-dire pour les ensembles d'Aubry-Mather dont le nombre de rotation est proche d'un nombre rationnel fixé) et en particulier qu'il y a beaucoup

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

d'ensembles d'Aubry-Mather hyperboliques de type Cantor au voisinage d'un point fixe elliptique. En fait on a un résultat plus général qui ne suppose pas que  $f$  préserve l'aire (voir [L 3]).

**THÉORÈME 2.2.** *Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{K}$  tel que:*

- i) si  $x$  est un point périodique de plus petite période  $q$ , alors  $1$  n'est pas valeur propre de  $Df_x^q$ ,*
- ii) si  $x$  et  $y$  sont des points périodiques de type selle, alors  $W^s(x)$  et  $W^u(y)$  s'intersectent transversalement.*

*Alors si  $\tilde{f}$  est un relèvement de  $f$  à  $\tilde{\mathbf{A}}$  et si  $\rho$  est rationnel, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que tout ensemble  $f$ -ordonné de nombre de rotation  $\rho'$  (pour  $\tilde{f}$ ) vérifiant  $0 < |\rho' - \rho| < \varepsilon$  est hyperbolique.*

**REMARQUE:** Dans le théorème, quand on suppose qu'un ensemble est hyperbolique, cela signifie qu'il existe deux champs continus de directions sur  $\Xi$ , l'un dilatant, l'autre contractant. On connaît une condition équivalente:  $\Xi$  est hyperbolique s'il existe une famille  $(C_x)_{x \in \Xi}$  de secteurs angulaires fermés, variant continûment avec  $x$ , un entier  $m$  et un réel  $\lambda > 1$  tels que pour tout  $x \in \Xi$  l'image par  $Df_x^m$  de  $C_x$  soit inclus dans l'intérieur de  $C_{f^m(x)}$  et tels que la restriction de  $Df_x^m$  à  $C_x$  et celle de  $Df_x^{-m}$  à  $\mathbf{R}^2 \setminus C_x$  soient des dilatations de rapport  $\lambda$ . En conséquence, il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\Xi$  dans  $\mathbf{A}$  tel que tout ensemble fermé invariant par  $f$  et contenu dans  $\mathcal{V}$  soit lui-même hyperbolique.

Avant de commencer la démonstration, énonçons deux corollaires:

**COROLLAIRE 2.1.** *Il existe un ensemble ouvert et dense de  $\mathbf{R}$  tel que tout ensemble  $f$ -ordonné dont le nombre de rotation soit dans cet ouvert est hyperbolique.*

## Patrice Le Calvez

**COROLLAIRE 2.2.** *L'ensemble des nombres rationnels pour lesquels il existe un ensemble d'Aubry-Mather qui n'est pas hyperbolique (par exemple une orbite périodique élliptique, attractive ou répulsive) n'a que des points isolés.*

**DÉMONSTRATION DU THÉORÈME:** On raisonne par l'absurde. Soit  $\rho$  un nombre rationnel. Supposons qu'il existe une suite  $(\rho_n)_{n \geq 0}$  de réels distincts de  $\rho$  et convergeant vers ce nombre ainsi qu'une suite  $(\Xi_n)_{n \geq 0}$  d'ensembles fermés  $f$ -ordonnés de nombre de rotation  $\rho_n$  tels qu'aucun d'eux ne soit hyperbolique. Puisque la suite  $(\rho_n)_{n \geq 0}$  est bornée, il en est de même de la suite  $(\Xi_n)_{n \geq 0}$  d'après la proposition 2.1. Ainsi, quitte à extraire une sous-suite de notre suite initiale on peut toujours supposer:

- i) que tous les  $\rho_n$  sont situés du même coté de  $\rho$ , strictement supérieurs à  $\rho$  par exemple;
- ii) que la suite  $(\Xi_n)_{n \geq 0}$  converge pour la distance de Hausdorff vers un ensemble  $f$ -ordonné  $\Xi$  de nombre de rotation  $\rho$ .

Nous allons montrer que  $\Xi$  est constitué d'un nombre fini d'orbites périodiques hyperboliques et d'un nombre également fini d'orbites hétéroclines à celles-ci. La condition de transversalité vérifiée par  $f$  forcera cet ensemble à être hyperbolique ainsi donc que tous les  $\Xi_n$  qui sont proches de lui. On aura obtenu une contradiction.

Écrivons  $\rho = \frac{p}{q}$  où  $p \in \mathbf{Z}$  et  $q \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$  sont premiers entre eux et posons  $F = \tilde{f}^q \circ T^{-p}$ . Les ensembles  $\alpha$ -limite et  $\omega$ -limite de toute orbite de  $\Xi$  sont des ensembles d'Aubry-Mather de nombre de rotation  $\rho$ , c'est-à-dire des orbites périodiques de période  $q$ . La condition i) vérifiée par  $f$  implique qu'il y a un nombre fini de tels

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

ensembles. Les points de  $\tilde{\Xi}$  invariants par  $F$  forment un ensemble discret, on l'écrit

$$\{(x_i) \mid i \in \mathbf{Z}\} \quad \text{où} \quad i < i+1 \Rightarrow p_1(x_i) < p_1(x_{i+1}).$$



LEMME 1. *Pour tout  $x$  appartenant à  $\tilde{\Xi}$ , on a  $p_1(F(x)) \geq p_1(x)$ .*

DÉMONSTRATION: Puisque  $\rho_n$  est strictement supérieur à  $\rho$  on a  $p_1(F(x)) > p_1(x)$ , pour tout  $n \in \mathbf{N}$  et tout  $x \in \Xi_n$ . Tout élément de  $\Xi$  étant limite d'une suite formée pour chaque  $n$  d'un point de  $\Xi_n$ , le lemme suit. □

LEMME 2. *Pour tout entier  $i$ , il existe  $x \in \tilde{\Xi}$  tel que*

$$p_1(x_i) < p_1(x) < p_1(x_{i+1}).$$

DÉMONSTRATION: Si le lemme est faux pour un entier  $i$ , on peut écrire  $\tilde{\Xi} = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} T^k(\Xi^*)$  où

$$\Xi^* = \{x \in \tilde{\Xi} \mid p_1(x_{i+1}) \leq p_1(x) \leq p_1(x_i) + 1\}.$$

Cet ensemble est invariant par  $F$  et on peut donc trouver un voisinage borné  $\mathcal{W}$  tel que  $F(\mathcal{W})$  ne rencontre aucun itéré  $T^k(\mathcal{W})$  où  $k$  est non nul. Choisissons  $n$  suffisamment grand pour que  $\tilde{\Xi}_n$  soit contenu dans la réunion des  $T^k(\mathcal{W})$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , puis choisissons  $x$  dans

## Patrice Le Calvez

$\tilde{\Xi}_n \cap W$ . L'image  $F(x)$  ne peut pas sortir de  $W$  et il en sera de même de tous les itérés successifs. La suite  $(F^k(x))_{k \geq 0}$  est donc bornée. Comme le nombre de rotation de  $\Xi_n$  est strictement plus grand que  $\frac{p}{q}$ , nous avons obtenu une contradiction.  $\square$

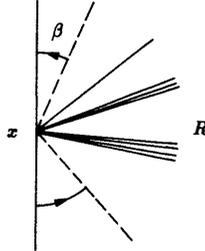
Grâce aux deux lemmes on sait maintenant qu'il existe une orbite qui part de  $x_i$  pour aboutir en  $x_{i+1}$ .

**LEMME 3.** *Chaque  $x_i$  est un point fixe hyperbolique sans réflexion.*

**DÉMONSTRATION:** Si  $y$  est différent de  $x_i$ , on note  $R_y$  la demi-droite engendrée par  $y - x_i$  puis on définit:

$$R = \bigcap_{\varepsilon > 0} Ad(\{R_y \mid y \in \tilde{\Xi} \text{ et } 0 < p_1(y) - p_1(x) < \varepsilon\})$$

Comme  $\Xi$  est  $f$ -ordonné,  $R$  est un ensemble fermé de  $\mathbf{R}^2$  invariant par  $DF_{x_i}$ , formé de demi-droites qui font avec le vecteur  $(0,1)$  un angle entre  $\beta - \pi$  et  $-\beta$ .



Ainsi  $DF_{x_i}$  a au moins une valeur propre réelle et positive et donc elle en a deux. Comme aucune n'est égale à 1 et comme  $x_i$

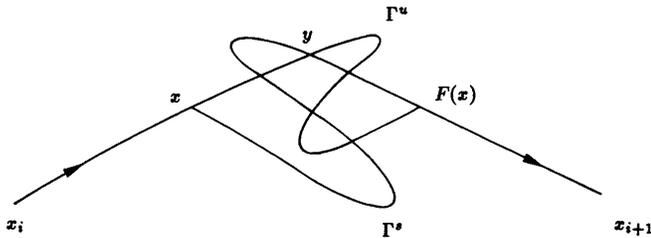
## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

n'est ni un puits, ni une source c'est un point fixe hyperbolique sans réflexion et d'ailleurs  $R$  se réduit à la direction instable.  $\square$

Tous les points de  $\tilde{\Xi}$  situés entre  $x_i$  et  $x_{i+1}$  sont sur la variété instable de  $x_i$  et sur la variété stable de  $x_{i+1}$ . Notre théorème sera démontré après le lemme suivant.

**LEMME 4.** *Il y a un nombre fini d'orbites entre  $x_i$  et  $x_{i+1}$ .*

**DÉMONSTRATION:** Choisissons  $x \in \tilde{\Xi}$  entre  $x_i$  et  $x_{i+1}$ . Puisque  $\Xi$  est  $f$ -ordonné, toute orbite comprise entre  $x_i$  et  $x_{i+1}$  distincte de celle de  $x$  possède exactement un point entre  $x$  et  $F(x)$ . Il suffit donc de montrer qu'il y a un nombre fini de points de  $\tilde{\Xi}$  entre  $x$  et  $F(x)$ . Soit  $y$  un tel point. Pour tout entier  $n$  on a la relation  $p_1(F^n(x)) < p_1(F^n(y)) < p_1(x_{i+1})$ . Ainsi  $y$  appartient non seulement à la variété stable de  $x_{i+1}$  mais plus précisément à la partie  $\Gamma^s$  de  $W^s(x_{i+1})$  qui joint  $x_{i+1}$  à  $x$ . Par un raisonnement analogue, on montre que  $y$  appartient à la partie  $\Gamma^u$  de  $W^u(x_i)$  qui joint  $x_i$  à  $F(x)$ . La condition ii) imposée à  $f$  implique que  $\Gamma^s$  et  $\Gamma^u$  n'ont qu'un nombre fini de points d'intersection.  $\square$



**REMARQUE:** La démonstration précédente nous prouve également

que si  $f$  vérifie les conditions i) et ii) elle n'a aucun graphe invariant de nombre de rotation rationnel (voir [He]).

### §5 Critères topologiques d'existence d'ensembles d'Aubry-Mather

Nous avons donné un bref aperçu des méthodes variationnelles dans l'étude des applications déviant la verticale. L'outil fondamental est la fonction génératrice caractéristique des systèmes conservatifs. Si l'on s'intéresse aux applications qui n'ont pas cette propriété, il faut trouver des critères topologiques d'existence d'ensembles d'Aubry-Mather, nous allons en exposer quelques-uns.

Le premier résultat est du à G.R. Hall [Ha] et exprime qu'un élément de  $\mathcal{K}$  qui a une orbite périodique mal ordonnée a également une orbite périodique bien ordonnée, plus précisément.

**THÉORÈME 2.3.** *Soit  $\tilde{f}$  un élément de  $\tilde{\mathcal{K}}$ , alors  $\tilde{f}$  admet un ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation  $\frac{p}{q}$  où  $p \in \mathbf{Z}$  et  $q \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$  si et seulement s'il existe  $x \in \tilde{\mathbf{A}}$  tel que  $\tilde{f}^q(x) = T^p(x)$ .*

La démonstration originale de ce résultat qui s'interprète en termes de tresse est assez technique et nous ne la donnerons pas, on peut trouver cependant une démonstration simple dans un preprint très récent de S. Angenent [An]. L'intérêt de ce résultat est le suivant: il existe des critères simples d'existence de points de type  $(p, q)$ , c'est-à-dire de points de  $\tilde{\mathbf{A}}$  qui vérifient  $\tilde{f}^q(x) = T^p(x)$ . Nous en donnons un, du à M. Casdagli [Ca 1].

**THÉORÈME 2.4.** *L'ensemble des points de type  $(p, q)$  où  $p \in \mathbf{Z}$  et  $q \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$  sont premiers entre eux est égal à*

$$\tilde{\mathcal{C}}_{\frac{p}{q}} \cap \tilde{f}(\tilde{\mathcal{C}}_{\frac{p}{q}})$$

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

où

$$\tilde{C}_z = \{x \in \mathbf{A}, p_1 \circ \tilde{f}^q(x) = p_1(x) + p\}.$$

DÉMONSTRATION: Tout point de type  $(p, q)$  est contenu dans  $\tilde{C}_{p/q}$  ainsi que son image par  $\tilde{f}^{-1}$  puisque celle-ci est elle-même de type  $(p, q)$ .

Réciproquement définissons pour tout point  $x = (\theta, r)$  la verticale  $D_x = \{\theta\} \times \mathbf{R}$ . Puisque  $f$  dévie la verticale, les ensembles  $\tilde{f}(D_{\tilde{f}^{-1}(x)})$  et  $D_x$  s'intersectent au point  $x$ . Ainsi si  $x \in \tilde{C}_{p/q} \cap \tilde{f}(\tilde{C}_{p/q})$  on peut écrire:

$$\{T^p(x)\} = \tilde{f}(D_{\tilde{f}^{-1}(T^p(x))}) \cap D_{T^p(x)}$$

et

$$\{\tilde{f}^q(x)\} = \tilde{f}(D_{\tilde{f}^{q-1}(x)}) \cap D_{\tilde{f}^q(x)}.$$

Comme  $D_{T^p(x)} = D_{\tilde{f}^q(x)}$  et  $D_{\tilde{f}^{q-1}(x)} = D_{T^p(\tilde{f}^{-1}(x))} = D_{\tilde{f}^{-1}(T^p(x))}$  on a  $T^p(x) = \tilde{f}^q(x)$ , le point est de type  $(p, q)$ . □

REMARQUE: Puisque  $f$  dévie la verticale à droite, l'ensemble  $C_{p/q} = \pi(\tilde{C}_{p/q})$  est compact et sépare l'anneau. En particulier si  $f$  préserve l'aire et si son flux est nul, cet ensemble doit rencontrer son image par  $f$ , on retrouve ainsi le fait que  $\frac{p}{q}$  appartient à  $\mathcal{R}(f)$ .

## Chapitre 3

### LA THÉORIE DE BIRKHOFF

Les théories d'Aubry et de Mather appliquées à l'étude d'un point fixe elliptique générique d'un difféomorphisme du plan préservant l'aire donnent l'existence d'ensembles d'Aubry-Mather un voisinage de ces points. Nous allons nous intéresser ici à une autre propriété provenant de la déviation de la verticale, due à Birkhoff et qui peut s'énoncer ainsi dans notre cas (voir [Bi 3] ou pour une démonstration rigoureuse [He] et l'appendice d'A. Fathi).

Si  $U$  est un petit voisinage ouvert invariant du point fixe, connexe et simplement connexe, alors sa frontière est le graphe  $r = \psi(\theta)$  d'une fonction continue.

Nous allons interpréter ce résultat dans l'anneau infini en essayant de distinguer ce qui provient de la déviation de la verticale et ce qui provient de la conservation de l'aire, de façon à utiliser certains résultats, dans le cas dissipatif par exemple. Donnons quelques définitions et quelques rappels de topologie du plan que nous utiliserons fréquemment.

Nous dirons qu'une partie bornée  $\Lambda$  de  $\mathbf{A}$  sépare l'anneau si son complémentaire a deux composantes connexes non bornées, nous noterons  $U_\Lambda$  la composante connexe inférieure (celle qui contient un anneau  $\mathbf{T}^1 \times ]-\infty, M[$ ) et  $V_\Lambda$  la composante connexe supérieure.

**Rappel 1.** Si  $X$  est une partie fermée et connexe de la sphère  $S^2$  toute composante connexe de  $S^2 \setminus X$  est simplement connexe.

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

**Rappel 2.** Si  $U$  est une partie ouverte, connexe et simplement connexe de  $S^2$ , sa frontière est connexe.

**Rappel 3.** Si  $\gamma: \tilde{\mathbf{A}} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}$  est une application continue et injective telle que  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} p_2 \circ \gamma(t) = -\infty$ , alors l'image de  $\gamma$  sépare  $\tilde{\mathbf{A}}$  en deux ouverts connexes et simplement connexes dont l'un est majoré (nous voulons dire que son image par  $p_2$  est majorée) et l'autre ne l'est pas.

Nous supposons dans tout le chapitre que  $f$  est un élément de  $\mathcal{K}$ ,  $\tilde{f}$  un relèvement de  $f$  à  $\tilde{\mathbf{A}}$  et que  $U$  est une partie ouverte de  $\mathbf{A}$ , invariante par  $f$ , homéomorphe à  $\mathbf{A}$  mais distincte de cet ensemble et contenant un anneau  $T^1 \times ]-\infty, M]$ . Nous noterons  $U^\circ = \{x \in \mathbf{A} \mid D^i(x) \subset U\}$  l'ensemble des points de  $U$  radialement accessibles et  $\mu_U$  l'application de  $\mathbf{T}^1$  dans  $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$  définie de la façon suivante:

$$\mu_U(\theta) = \sup\{r \in \mathbf{R} \mid \{\theta\} \times ]-\infty, r] \subset U\}.$$

Remarquons que  $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$  est ouvert, connexe et simplement connexe. Nous désirons étudier les propriétés de  $U$ , nous allons introduire la notion de chemin positif et de chemin négatif de façon à obtenir deux ensembles  $U^-$  et  $U^+$  vérifiant la proposition 3.3, celle-ci étant essentielle dans notre étude.

### §1. Définitions et propriétés des chemins positifs et négatifs

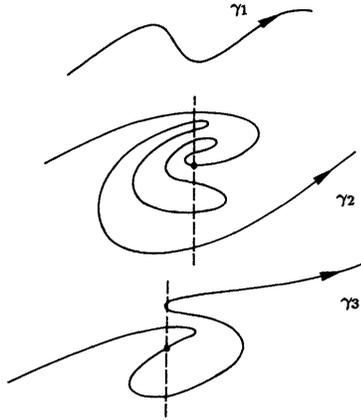
**DÉFINITION 3.1:** Une application  $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}$  continue et injective est un chemin positif si et seulement si:

$$\text{i) } \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ (-\infty)}} p_2 \circ \gamma(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ (-\infty)}} p_1 \circ \gamma(t) = +\infty \quad (-\infty)$$

## Patrice Le Calvez

- ii) si  $\gamma(-\infty, t]$  et  $D^s(\gamma(t))$  ne se rencontrent pas, il en est de même de  $\gamma(t, +\infty[ \cap D^s(\gamma(t))$  et de la composante connexe non majorée  $W_t$  délimitée par  $\gamma(-\infty, t] \cup D^s(\gamma(t))$ .

EXEMPLES:  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont des chemins positifs mais pas  $\gamma_3$ .



DÉFINITION 3.2: i) L'application  $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}$  est un chemin négatif si  $\Sigma \circ \gamma$  est un chemin positif, où  $\Sigma$  est la symétrie  $\Sigma: (\theta, r) \mapsto (-\theta, r)$ .

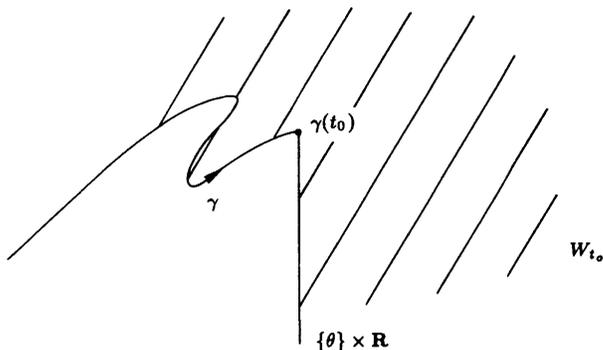
ii) L'application continue  $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{A}$  est un chemin positif (resp. négatif) si chaque relèvement  $\tilde{\gamma}: \mathbf{R} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}$  de  $\gamma$  est un chemin positif (resp. négatif).

PROPOSITION 3.1. *L'image d'un chemin positif  $\gamma$  rencontre chaque verticale  $\{\theta\} \times \mathbf{R}$ , le premier point (resp. le dernier point) où  $\gamma$  atteint cette droite correspond au point d'intersection d'ordonnée la plus grande (la plus petite).*

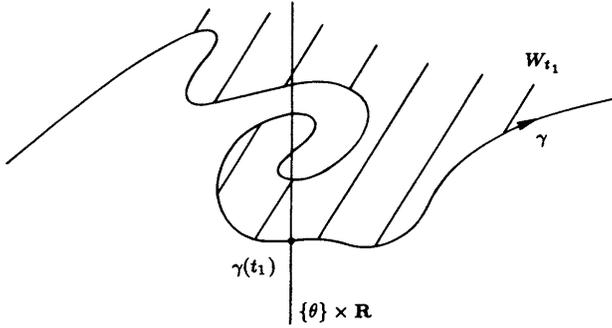
DÉMONSTRATION: La propriété i) vérifiée par le chemin positif  $\gamma$  nous dit que l'intersection de son image et de  $\{\theta\} \times \mathbf{R}$  est compacte,

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

on peut donc parler de premier et de dernier point de rencontre. Notons  $\gamma(t_0)$  le premier point de rencontre. Les ensembles  $\gamma(]-\infty, t_0[)$  et  $D^i(\gamma(t_0))$  sont disjoints et la verticale  $D^s(\gamma(t_0)) \setminus \{\gamma(t_0)\}$  contenue dans  $W_{t_0}$ . Comme  $\gamma$  est un chemin positif, l'ensemble  $\tilde{\gamma}(]t_0, +\infty[)$  est disjoint de  $D(\gamma(t_0))$  ce qui prouve la première partie de la proposition.

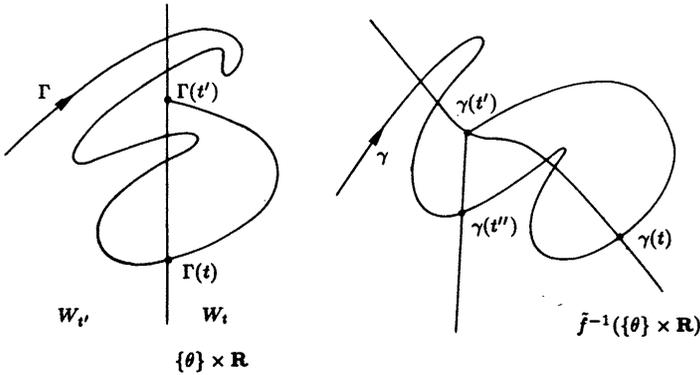


Considérons maintenant le point  $\gamma(t_1)$  de l'image de  $\gamma$  situé sur  $\{\theta\} \times \mathbf{R}$  d'ordonnée minimale. L'ensemble  $\gamma(]t_1, +\infty[)$  est disjoint de la courbe  $\gamma(]-\infty, t_1]) \cup D^i(\gamma(t_1))$ , il rencontre donc  $W_{t_1}$  (quand  $t$  est grand) mais pas sa frontière, il est donc contenu dans  $W_{t_1}$ . Or  $\gamma$  est un chemin positif, donc  $\gamma(]t, +\infty[)$  ne rencontre pas  $D^s(\gamma(t_1))$ , on a prouvé la seconde partie de la proposition.  $\square$



PROPOSITION 3.2. Si  $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}$  est un chemin positif (resp. négatif), il en est de même de  $\tilde{f} \circ \gamma$  (resp.  $\tilde{f}^{-1} \circ \gamma$ ).

DÉMONSTRATION: Limitons nous au cas positif et posons  $\Gamma = \tilde{f} \circ \gamma$ . Puisque  $f$  dévie la verticale à droite, la condition i) des chemins positifs est automatiquement vérifiée pour  $\tilde{f} \circ \gamma$ . Montrons la condition ii) en raisonnant par l'absurde. Supposons que  $\Gamma(] - \infty, t[)$  soit disjoint de  $D^i(\Gamma(t))$  et que  $\Gamma$  rencontre  $D^s(\Gamma(t)) \cap W_t$  en un point  $t' > t$ . Notons alors  $W_{t'}$  la composante connexe majorée délimitée par  $\Gamma(] - \infty, t]) \cup D^i(\Gamma(t))$ .



## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

L'ensemble  $\tilde{f}^{-1}(W'_t)$  est délimité par la réunion de  $\gamma(-\infty, t]$  et de  $\tilde{f}^{-1}(D^i(\Gamma(t)))$ , ce dernier morceau se trouvant à droite de  $\gamma(t)$ , lui-même à droite de  $\gamma(t')$ . La verticale  $D^i(\gamma(t))$  contient des points de  $\tilde{f}^{-1}(W'_t)$  (dès que l'ordonnée est suffisamment petite) et le point  $\gamma(t')$  qui n'y est pas, elle rencontre donc la frontière de cet ensemble sur la partie constituée de  $\gamma(-\infty, t]$ . On note alors  $\gamma(t'')$  le point d'intersection d'ordonnée la plus petite. La composante connexe majorée délimitée par  $\gamma(-\infty, t''] \cup D^i(\gamma(t))$  est contenue dans  $f^{-1}(W_t)$ , ainsi  $\gamma(t')$  est dans l'autre composante et comme  $t'$  est supérieur à  $t''$ ,  $\gamma$  n'est pas un chemin positif.  $\square$

### §2. Propriétés fondamentales de l'anneau $U$

Considérons les deux parties ouvertes de  $U$  définies de la manière suivante:

$U^+$  (resp.  $U^-$ ) est l'ensemble des points  $x$  de  $U$  tel qu'il existe un chemin positif (resp. négatif)  $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{A}$  vérifiant:

$$(P) \quad \begin{cases} \gamma(-\infty, 0] \text{ est contenu dans } U, \\ \gamma(0) = x. \end{cases}$$

PROPOSITION 3.3. *Nous avons les relations suivantes:*

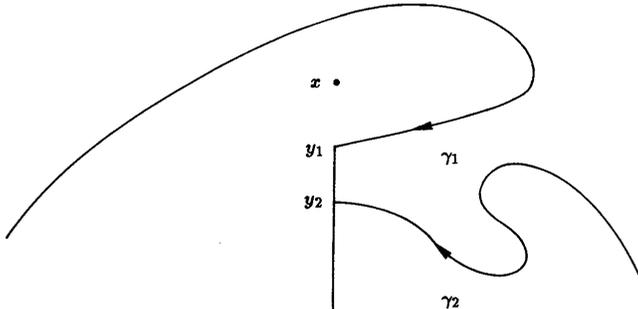
- i)  $f(U^+) \subset U^+$  et  $f^{-1}(U^-) \subset U^-$ ,
- ii)  $U^- \cap U^+ = U^o$ ,
- iii) l'un des ensembles  $U^-$  ou  $U^+$  est majoré.

DÉMONSTRATION: i) C'est une conséquence immédiate de l'invariance de  $U$  et de la proposition 3.2.

ii) Si  $x$  est un point de  $\tilde{U}^o$ , on obtient deux chemins positifs et négatifs vérifiant la propriété (P) en considérant les droites passant par  $x$  et qui font avec la verticale un angle  $\alpha$  et  $-\alpha$  où  $\alpha$  est proche de 0, ainsi  $\tilde{U}^o$  est contenu à la fois dans  $\tilde{U}^-$  et dans  $\tilde{U}^+$ .

## Patrice Le Calvez

Supposons maintenant que  $x$  soit à la fois dans  $\tilde{U}^-$  et dans  $\tilde{U}^+$  et considérons deux chemins  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  respectivement positifs et négatifs vérifiant la propriété (P). Notons  $y_1 = \gamma_1(t_1)$ ,  $t_1 \leq 0$ , le premier point de rencontre de  $\gamma_1$  avec  $D^i(x)$ . L'ensemble  $\gamma_1(]-\infty, t_1]) \cup D^i(y)$  sépare le plan en une composante non majorée  $W_1$  et une composante majorée  $W'_1$  qui contient  $x$  si  $y_1$  est distinct de  $x$ . Dès que  $-t$  est grand,  $\gamma_2(t)$  appartient à  $W_1$ , on peut donc considérer le premier point  $y_2 = \gamma_2(t_2)$ ,  $t_2 \leq 0$  de rencontre de  $\gamma_2$  avec la frontière de  $W_1$ . Si  $y_2$  appartient à  $D^i(y) \setminus \{y\}$  le point  $x$  se trouve dans la composante connexe  $W_2$  non majorée délimitée par  $\gamma_2(]-\infty, t_2]) \cup D^i(y_2)$ , en effet l'ensemble formé de la réunion de  $\gamma_2(]-\infty, t_2])$  et du segment  $[y, x]$  est connexe, intersecte  $W_2$  et n'intersecte pas sa frontière. Or ceci est impossible.

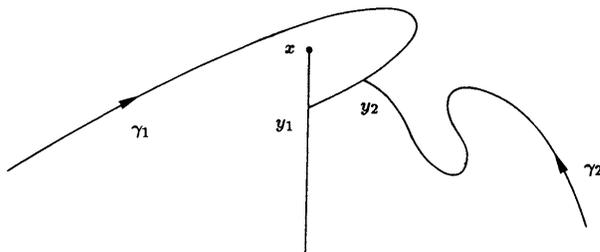


Si, par contre,  $y_2$  appartient à  $\gamma_1(]-\infty, t_1])$  et s'écrit  $y_2 = \gamma_1(t_3)$ ,  $t_3 \leq t_1$ , la courbe  $\gamma_1(]-\infty, t_3]) \cup \gamma_2(]-\infty, t_2])$  délimite une région  $W_3$  non majorée qui est contenue dans  $\tilde{U}$ , puisque  $\tilde{U}$  est simplement connexe.

Dans le cas où  $t_3$  est différent de  $t_1$ , la verticale  $D^i(x)$  ne ren-

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

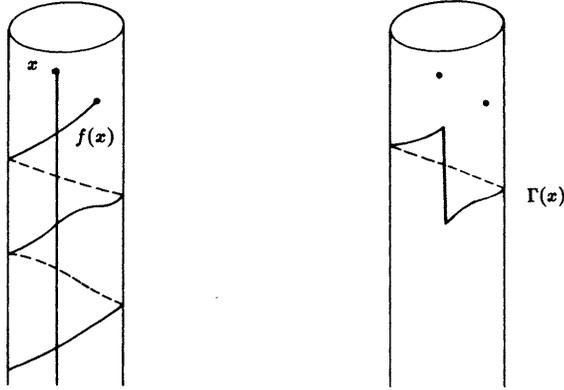
contre pas la frontière de  $W_3$  et se trouve donc contenue dans cet ensemble, par conséquent  $x$  appartient à  $\tilde{U}_o$ .



Si  $t_3$  est égal à  $t_1$ , c'est-à-dire si  $y_2 = y_1$ , deux cas sont possibles:

- $y_1 = y_2 = x$ . Dans ce cas le raisonnement précédent prouve que  $D^i(x) \setminus \{x\}$  est inclus dans  $\tilde{U}$  et donc que  $x$  appartient à  $\tilde{U}_o$ .
- $y_1 = y_2 \neq x$ . Dans ce cas la verticale  $D^i(y_1)$  sépare  $W_3$  en deux ouverts, l'un est égal à  $W'_1$ , l'autre à l'ensemble  $W'_2$ . Ils doivent tous les deux contenir  $x$ , ceci est clairement impossible.

iii) Remarquons d'abord que  $U^o$  est majoré. En effet, pour tout point  $x$  de  $\mathbf{A}$ , la courbe  $f(D^i(x))$  s'enroule autour de l'anneau recoupant  $D^i(x)$  une infinité de fois. On peut donc définir une courbe de Jordan  $\Gamma(x)$  en joignant les deux premiers points d'intersection d'une part par un morceau de  $D^i(x)$ , d'autre part par un morceau de  $f(D^i(x))$ .



Si  $x$  appartient à  $U^\circ$ ,  $\Gamma(x)$  est contenue dans  $U$  comme d'ailleurs toute la composante inférieure  $U_{\Gamma(x)}$  de cette courbe. Si  $U^\circ$  n'est pas majoré, on peut prendre  $x$  aussi haut que l'on veut, il en sera de même de  $f(x)$  et, comme l'angle que fait la verticale est entre  $\beta$  et  $\pi - \beta$ , il en sera de même de tous les points de  $\Gamma(x)$ . Ainsi  $U$  doit être égal à  $\mathbf{A}$ , ce qui n'est pas le cas.

Supposons maintenant que ni  $U^+$  ni  $U^-$  ne soient majorés. Il en est de même de  $f(U^+)$ , on peut donc trouver, pour tout réel  $M$ , deux chemins  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  respectivement négatif et positif, à valeur dans  $\tilde{U}$  sur  $] -\infty, 0]$  tels que:

$$p_1(\gamma(0)) \geq M, \quad p_1(\tilde{f} \circ \gamma_2(0)) \geq M.$$

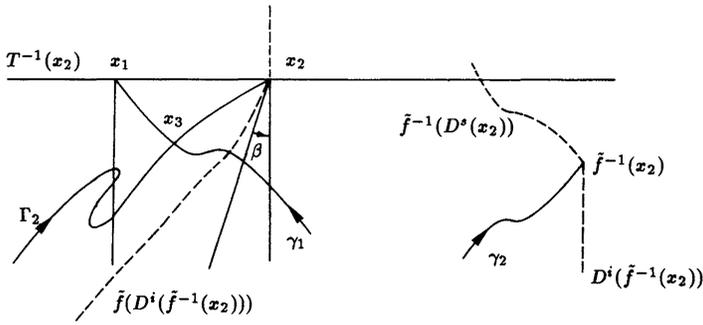
On peut toujours supposer que les points  $x_1 = \gamma_1(0)$  et  $x_2 = \tilde{f} \circ \gamma_2(0)$  sont les premiers points où  $\gamma_1$  et  $\Gamma_2 = f \circ \gamma_2$  rencontrent  $\mathbf{R} \times \{M\}$  et qu'ils vérifient:

$$p_1(x_1) \leq p_1(x_2) < p_1(x_1) + 1.$$

Puisque le premier point de rencontre de  $\gamma_1$  et de  $\mathbf{R} \times \{M\}$  est  $x_1$ ,  $\gamma_1(] -\infty, 0])$  est à droite de  $x_1$ . De même, puisque  $\gamma_2(] -\infty, 0])$

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

ne rencontre pas  $\tilde{f}^{-1}(D^s(x_2))$ , il est à gauche de  $\tilde{f}^{-1}(x_2)$  et son image  $\Gamma_2(]-\infty, 0])$  est au-dessus de  $\tilde{f}(D^i(\tilde{f}^{-1}(x_2)))$ . Les courbes  $\gamma_1$  et  $\Gamma_2$  vont se rencontrer en un point  $x_3$  situé entre  $x_1$  et  $x_2$ . Celui-ci appartient à  $\tilde{U}^- \cap \tilde{U}^+ = \tilde{U}^o$  et son ordonnée est supérieure ou égale à  $M - \cotg \beta$ . Comme  $M$  est arbitraire, ceci contredit le fait que  $\tilde{U}^o$  soit majoré. □



### §3. Applications du résultat précédent

Commençons par un résultat dont nous aurons l'équivalent en remplaçant  $U^-$  par  $U^+$ ,  $f$  par  $f^{-1}$  et continue à droite par continue à gauche.

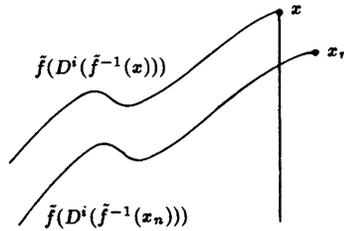
**PROPOSITION 3.4.** *Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes:*

- i)  $U^o$  est inclus dans l'adhérence de  $f(U^o)$ ,
- ii)  $U^o$  est inclus dans  $f(U^o)$ ,
- iii)  $U^o$  est égal à  $U^-$ ,

**Patrice Le Calvez**

iv)  $\mu_U$  est continue à droite.

DÉMONSTRATION: i)  $\Rightarrow$  iv). Fixons un réel  $\theta$  et considérons  $x = (\theta, \mu_U(\theta)) \in \tilde{\mathbf{A}}$ . L'ensemble  $U^\circ$  est ouvert, il contient  $D^i(x) \setminus \{x\}$  et il est contenu dans  $\overline{f(U^\circ)}$ , on peut donc construire une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  convergeant vers  $x$  formée de points situés à droite de  $x$  et à valeurs dans  $\tilde{f}(U^\circ)$ , tels que  $\tilde{f}(D^i(\tilde{f}^{-1}(x_n)))$  rencontre  $D^i(x)$ .



De la connexité simple de  $\tilde{U}$  on en déduit que tous les points situés au-dessous de  $\tilde{f}(D^i(\tilde{f}^{-1}(x)))$  sont dans  $U^\circ$  et, par conséquent, que l'on a, pour tout  $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbf{R}^2$ :

$$\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow \mu(\theta_1) \geq \mu(\theta_2) + \cotg \beta (\theta_1 - \theta_2).$$

Fixons  $\theta_1 \in \mathbf{R}$ , cette relation implique

$$\limsup_{\theta \rightarrow \theta_1^+} \mu(\theta) \leq \mu(\theta_1),$$

le caractère ouvert de  $\tilde{U}$  implique

$$\liminf_{\theta \rightarrow \theta_1^+} \mu(\theta) \geq \mu(\theta_1),$$

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

la fonction  $\mu$  est donc continue à droite.

iv)  $\Rightarrow$  iii). Raisonnons par contraposée, si la proposition iii) n'est pas vérifiée, on peut trouver un chemin négatif  $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}$  tel que  $\gamma(] - \infty, 0[)$  soit contenu dans  $U_o$  mais pas  $\gamma(0)$ . Grâce à la proposition 3.1, on sait que  $\gamma(] - \infty, 0[)$  est à droite de  $\gamma(0)$  et donc que  $\mu_U$  n'est pas continue à droite au point  $\theta = p_1(\gamma(0))$ .

L'implication iii)  $\Rightarrow$  ii) n'est rien d'autre que l'inclusion  $U^- \subset f(U^-)$  de la proposition 3.3 écrite quand  $U^- = U^o$ , l'implication ii)  $\Rightarrow$  i) est évidente. □

Appliquons ce résultat dans le cas conservatif.

**THÉORÈME 3.1.** *Supposons que  $f$  préserve une mesure  $\xi$  chargeant les ouverts ( $\xi(W) > 0$  pour tout ouvert non vide  $W$ ) et notons  $\alpha(f)$  le flux de Calabi*

- i) si  $\alpha(f) > 0$ ,  $U^o$  est égal à  $U^-$  et distinct de  $U^+$ ,
- ii) si  $\alpha(f) < 0$ ,  $U^o$  est égal à  $U^+$  et distinct de  $U^-$ ,
- iii) si  $\alpha(f) = 0$ ,  $U^o$  est égal à  $U$ , la frontière est un graphe invariant.

**DÉMONSTRATION:** On sait déjà que l'un des ensembles  $U^-$  ou  $U^+$  est majoré, supposons que ce soit  $U^-$ . L'ensemble  $W = U^o \setminus \overline{f(U^o)}$  est contenu dans  $U^+ \setminus f(U^+)$ , d'après les inclusions:

$$\begin{cases} U^o \subset U^+ \\ U^o \cap f(U^+) \subset U^- \cap f(U^+) \subset f(U^-) \cap f(U^+) = f(U^o) \end{cases}$$

il est donc ouvert et errant. La suite  $(f^{-k}(W))_{k \geq 1}$  est donc formée d'ensembles disjoints ayant même mesure, contenus dans  $U^-$  et disjoints de  $U^o$ . Comme  $U^-$  est majoré ce n'est possible que si leur mesure est nulle, c'est-à-dire si  $W$  est vide. Ainsi  $U^o$  est inclu dans  $\overline{f(U^o)}$  ce qui, d'après la proposition 3.4, implique que  $U^o$  soit égal

## Patrice Le Calvez

à  $U^-$  et  $\mu_U$  continue à droite. L'égalité  $U^\circ \subset f(U^\circ)$  oblige alors le flux de  $f$  à être nul si  $f(U^\circ)$  est inclus dans  $\overline{U^\circ}$ , strictement positif dans le cas contraire. Dans le premier cas, l'application  $\mu_U$  est aussi continue à gauche, la frontière de  $U$  est le graphe de cette fonction.

En envisageant maintenant le cas où  $U^+$  est majoré on obtient le cas où le flux est strictement négatif, ou alors on retrouve celui où il est nul.  $\square$

Envisageons maintenant le cas dissipatif.

**THÉORÈME 3.2.** *Supposons les deux hypothèses suivantes:*

- i) *pour tout  $x \in A$ ,  $0 < \det Df_x < 1$ ,*
- ii)  *$U$  est majoré.*

*Alors  $U^\circ$  est égal à  $U^-$  et  $\mu_U$  continue à droite.*

**DÉMONSTRATION:** Il suffit de prouver que l'ouvert  $W = U^\circ \setminus \overline{f(U^\circ)}$  est vide. On sait que la suite  $(f^{-k}(W))_{k \geq 1}$  est disjointe de  $U^+$  et contenue dans  $U^-$ , les hypothèses du théorème impliquent que c'est vrai.  $\square$

### §4. Théorie de Birkhoff et ensembles d'Aubry-Mather

Nous allons chercher ici des liens avec le chapitre précédent. Si la frontière de  $U$  est un graphe invariant, c'est en particulier un ensemble  $f$ -ordonné et on peut définir un nombre de rotation. En fait ceci est possible dès que  $U$  vérifie les conditions de la proposition 3.4 ou leurs analogues avec  $U^+$  au lieu de  $U^-$ , comme l'indique la proposition suivante où le graphe de  $\mu_U$  est noté  $\text{gr } \mu_U$ .

**THÉORÈME 3.3.** *Si  $U^\circ$  est égal à  $U^-$ ,  $f^{-1}$  envoie le graphe de  $\mu_U$  dans lui-même, cet ensemble contient un ensemble d'Aubry-Mather, et si  $\rho$  est son nombre de rotation, on a pour tout entier  $k$  positif:*

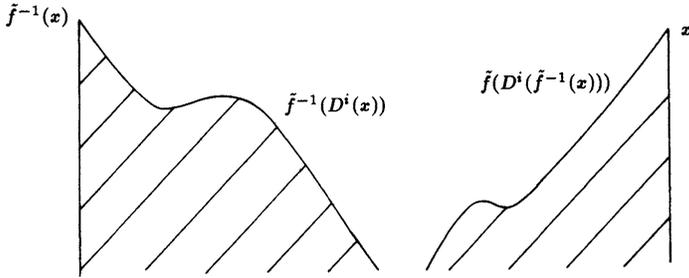
## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

pour tout  $x \in \text{gr } \mu_U$ ,  $-1 < p_1(\tilde{f}^{-k}(x)) - p_1(x) + k\rho < 1$ ,

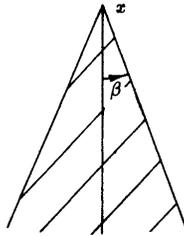
pour tout  $x \in U^\circ$ ,  $-1 < p_1(\tilde{f}^{-k}(x)) - p_1(x) + k\rho$ ,

pour tout  $x \in \mathbf{A} \setminus U^\circ$ ,  $-1 < p_1(\tilde{f}^k(x)) - p_1(x) - k\rho$ .

DÉMONSTRATION: Plaçons nous dans  $\tilde{\mathbf{A}}$  et considérons un point  $x = (\theta, \mu_U(\theta))$  du graphe de  $\mu_U$ . La verticale  $D^i(x) \setminus \{x\}$  étant contenue dans  $\tilde{U}^\circ$ , il en est de même de son image par  $\tilde{f}^{-1}$ , d'après la condition ii) de la proposition 3.4. En particulier les ouverts hachurés ci-dessous sont contenus dans  $U^\circ$ .

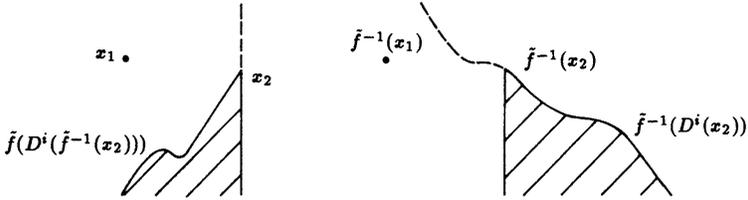


De la continuité à droite de  $\mu_U$ , on déduit d'une part que  $\tilde{f}^{-1}(x)$  appartient au graphe de  $\mu_U$ , ce qui prouve l'inclusion  $f^{-1}(\text{gr } \mu_U) \subset \text{gr } \mu_U$ , et d'autre part, que pour tout point de  $f^{-1}(\text{gr } \mu_U)$ , l'ouvert hachuré ci-dessous est contenu dans  $U^\circ$ .



## Patrice Le Calvez

En particulier l'adhérence de  $f^{-1}(\text{gr } \mu_U)$  est contenue dans le graphe de  $\mu_U$ . L'ensemble  $\Xi = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} f^{-k}(\overline{\text{gr } \mu_U})$  est donc compact, non vide, invariant par  $f$  et contenu dans le graphe de  $\mu_U$ , il vérifie la première propriété des ensembles  $f$ -ordonnés. Il vérifie aussi la seconde; en effet, si  $x_1$  et  $x_2$  sont deux points du graphe de  $\mu_U$  et si  $p_1(x_1) < p_1(x_2)$ , le point  $x_1$  est au-dessus de  $\tilde{f}(D^i(\tilde{f}^{-1}(x_2)))$  et ainsi  $p_1(\tilde{f}^{-1}(x_1)) < p_1(\tilde{f}^{-1}(x_2))$ .



L'application  $\tilde{f}^{-1}$  préserve sur le graphe de  $\mu_U$  l'ordre défini par  $p_1$ , en particulier  $\Xi$  est un ensemble  $f$ -ordonné, il contient un ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation  $\rho$ .

La première double-inegalité se démontre comme pour les homéomorphismes du cercle. Puisque  $f^{-k}$  préserve l'ordre sur le graphe de  $\mu_U$ , la variation de  $F = p_1 \circ f^{-k} - p_1 - k\rho$  est strictement inférieure à 1, et puisque  $\Xi$  a un nombre de rotation égal à  $\rho$ ,  $F$  doit s'annuler ou changer de signe sur  $\Xi$ .

La seconde inégalité se montre de la façon suivante: si  $x$  appartient à  $U^o$ , il en est de même de tous les éléments de la suite  $(f^{-\ell}(x))_{\ell \geq 0}$ . Si on note  $y_\ell$  le point du graphe de  $\mu_U$  qui a même

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

abscisse que  $f^{-\ell}(x)$ , on a la relation:

$$p_1(y_\ell) = p_1(f^{-\ell}(x)) > p_1(f^{-1}(y_{\ell-1})),$$

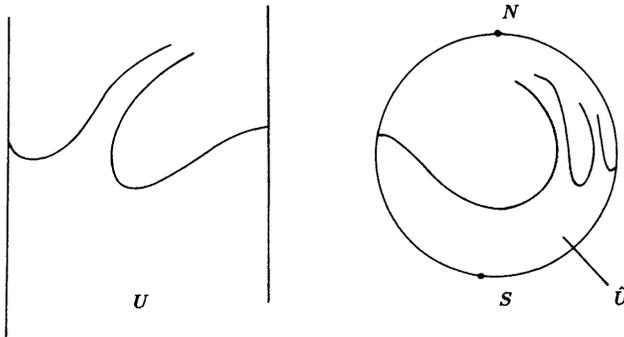
et comme  $\tilde{f}^{-1}$  préserve l'ordre, on obtient par récurrence

$$p_1(y_k) > p_1(f^{-k}(y_0)) > p_1(y_0) - k\rho - 1.$$

La troisième relation se montre de façon identique en posant  $z_p = f^{k-\ell}(x)$ , en utilisant le fait que tous les  $z_\ell$  sont en dehors de  $U^o$  et en considérant le point  $y_\ell$  du graphe de  $\mu_U$  de même coordonnée que  $z_\ell$ . □

REMARQUE 1: Comme pour les homéomorphismes du cercle, si  $x$  est un point de  $\text{gr } \mu_U$ , son ensemble  $\alpha$ -limite est un ensemble d'Aubry-Mather qui est indépendant de  $x$  dans le cas où  $\rho$  est irrationnel, que dépend de  $x$  dans le cas où  $\rho$  est rationnel et qui est alors une orbite périodique qui n'est pas un puits.

REMARQUE 2: Le nombre  $\rho$  a une autre interprétation en termes de bouts premiers (voir [Ma 3] ou [L 4]). En effet, on peut compactifier l'anneau  $\mathbf{A}$  en ajoutant les deux bouts  $N$  et  $S$ . On obtient alors un prolongement  $\hat{f}$  de  $f$  qui est un homéomorphisme de  $S^2$  laissant fixe chacun des bouts et laissant invariant l'ouvert connexe et simplement connexe  $\hat{U} = U \cup \{S\}$ .



## Patrice Le Calvez

Si on munit  $S^2 = \mathbf{A} \cup \{N, S\}$  d'une structure analytique on peut trouver une application conforme

$$\phi: \hat{U} \rightarrow \mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C}, |z| < 1\}.$$

L'homéomorphisme  $F = \phi \circ \hat{f} \circ \phi^{-1}$  de  $\mathbf{D}$  préserve l'orientation et se prolonge en un homéomorphisme de  $\overline{\mathbf{D}}$ . La classe de conjugaison de cet homéomorphisme est alors indépendante du choix de  $\phi$ , ainsi donc que le nombre de rotation défini sur la frontière de  $\mathbf{D}$ . Celui-ci qui est un élément de  $\mathbf{T}^1$  indique dans quel ordre s'ordonnent les orbites des points de la frontière de  $U$  qui sont accessibles par un chemin continu à valeur dans  $U$ . En considérant le cas particulier des points radialement accessibles (pour être rigoureux en considérant les couples formés d'un point  $x$  du graphe de  $\mu_U$  et de la verticale  $D^i(x)$ ), ce qui précède nous dit que c'est tout simplement  $\rho + \mathbf{Z}$ .

Nous allons utiliser cette interprétation du nombre de rotation dans le résultat suivant, où l'on garde les hypothèses et les notations du théorème 3.3.

**PROPOSITION 3.5.** *Soit  $\Xi'$  un ensemble d'Aubry-Mather de  $f$  de nombre de rotation  $\rho'$ , alors:*

- si  $\rho' < \rho$ ,  $\Xi'$  est contenu dans  $U^\circ$ ,
- si  $\rho' > \rho$ ,  $\Xi'$  est disjoint de  $U$ .

**DÉMONSTRATION:** Le théorème 3.3 nous dit que  $\Xi'$  est contenu dans  $U^\circ$  si  $\rho' < \rho$  et disjoint à la fois de  $U^\circ$  et du graphe de  $\mu_U$  si  $\rho' > \rho$ . Montrons que dans le second cas il est disjoint de  $U$ .

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

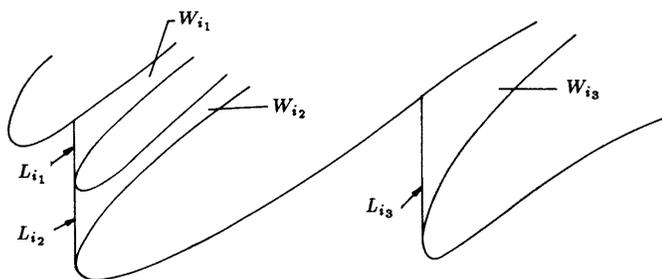
L'assertion

$$\theta_2 > \theta_1 \Rightarrow \mu_U(\theta_2) - \mu_U(\theta_1) \leq \cotg \beta (\theta_2 - \theta_1)$$

montrée dans la proposition 3.4 prouve non seulement que  $\mu_U$  est continue à droite, mais aussi qu'elle admet une limite à gauche en chaque point. On peut définir pour tout point de discontinuité  $\theta_o$  de  $\mu_U$  le segment

$$L_{\theta_o} = \{\theta\} \times [\mu_U(\theta_o), \lim_{\theta \rightarrow \theta_o^-} \mu_U(\theta)].$$

Plaçons nous dans le revêtement universel, chaque ensemble  $L_{\theta_o}$  est contenu dans l'adhérence de  $\tilde{U}_o$ , son image par  $\tilde{f}^{-1}$  est donc dans l'union de  $U_o$  et du graphe de  $\mu_U$ . D'autre part il découpe  $U$  en une partie contenant  $U_o$  et une autre partie formée d'ouverts connexes et simplement connexes. On note  $(W_i)_{i \in I}$  la famille d'ouverts ainsi obtenus et  $L_i$  le segment vertical qui les borde.



L'ensemble  $\Xi'$  étant disjoint de  $U^o$  et du graphe de  $\mu_U$  est contenu dans la réunion des  $W_i$ . Comme  $\Xi'$  est minimal il existe

## Patrice Le Calvez

$x \in \Xi'$ , il existe  $(i, i') \in I^2$ ,  $p \in \mathbf{Z}$  et  $q \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$  tels que:

$$x \in W_i, \quad f^q(x) \in W_{i'} = T^p(W_i).$$

(Si  $\rho'$  est rationnel on prend  $\frac{p}{q} = \rho'$ ).

L'image  $f^q(W_i)$  est connexe et disjointe de  $U^o$ , elle est donc contenue dans  $W_{i'}$  et il en est de même de l'image par  $f^q$  du segment  $L_i$  moins ses extrémités. Mais celles-ci sont accessibles (justement par le segment), ainsi le nombre de rotation  $\rho$  doit être égal à  $\frac{p}{q}$ ; en effet la  $q^{\text{ième}}$  puissance de l'homéomorphisme du cercle obtenu par conjugaison sur la frontière de  $\bar{D}$  aura un intervalle envoyé dans lui-même. Mais ceci est impossible quand  $\rho'$  est rationnel puisque  $\rho$  et  $\rho'$  sont différents, c'est également impossible dans le cas où  $\rho'$  est irrationnel car on peut choisir  $\frac{p}{q}$  aussi près que l'on veut de  $\rho'$ .  $\square$

## Chapitre 4

### PERSISTANCE DES ENSEMBLES d'AUBRY-MATHER

Une application  $f$  qui dévie la verticale qui préserve l'aire et qui a un flux nul admet un ensemble d'Aubry-Mather pour tout nombre de rotation. Nous allons voir ici ce que deviennent ces ensembles si on perturbe  $f$ , nous verront qu'à l'exception des nombres de rotation associés à des graphes invariants, les autres nombres persistent (voir [L 5]).

**THÉOREME 4.1.** *Soit  $f_o$  un élément de  $\mathcal{K}$  qui préserve une mesure chargeant les ouverts et qui a un flux nul, et soit  $\tilde{f}_o$  un relèvement de  $f_o$  à  $\tilde{\mathbb{A}}$ . Alors, pour tout compact  $Z$  contenu dans  $\mathcal{R}(\tilde{f}_o) \setminus \mathcal{R}'(\tilde{f}_o)$ , il existe un voisinage  $\mathcal{W}$  de  $\tilde{f}_o$  dans  $\mathcal{K}$  tel que  $Z$  soit contenu dans l'ensemble  $\mathcal{R}(\tilde{f})$  de tout élément  $f$  de  $\mathcal{W}$ .*

Avant de montrer ce résultat, examinons quelques propriétés des ensembles  $C_\rho$ ,  $\rho \in \mathbf{Q}$  définis dans le Chapitre 2 (voir [L 1]). Rappelons que si  $\tilde{f}$  relève un élément  $f$  de  $\mathcal{K}$ , si  $p \in \mathbf{Z}$  et  $q \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$  sont premiers entre eux et si  $\rho = \frac{p}{q}$ , on définit:

$$\tilde{C}_\rho = \{x \in \tilde{\mathbb{A}} \mid p_1(\tilde{f}^q(x)) = p_1(x) + p\}$$

et  $C_\rho = \pi(\tilde{C}_\rho)$ .

Définissons également pour tout compact  $X$  séparant l'anneau les

**Patrice Le Calvez**

ensembles:

$$X^i = \{x \in X \mid D^i(x) \cap X = \{x\}\}$$

et

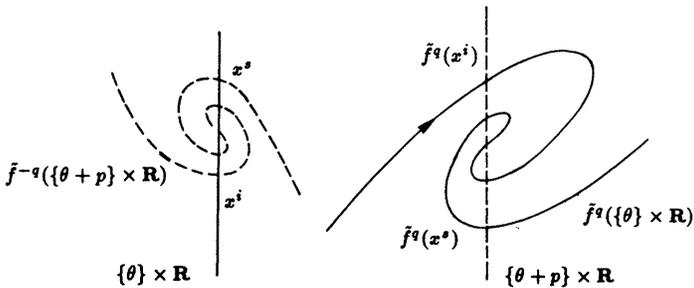
$$X^s = \{x \in X \mid D^s(x) \cap X = \{x\}\}.$$

**PROPOSITION 4.1.** *Nous avons les égalités suivantes:*

- $f^q(C_\rho^s) = (f^q(C_\rho))^i,$
- $f^q(C_\rho^i) = (f^q(C_\rho))^s.$

**DÉMONSTRATION:** Plaçons nous dans  $\tilde{A}$  et fixons  $\theta \in \mathbf{R}$ . L'ensemble  $\tilde{f}(\{\theta\} \times \mathbf{R})$  est l'image d'un chemin positif, il en est de même de  $\tilde{f}^q(\{\theta\} \times \mathbf{R})$  (proposition 3.2). Son intersection  $\Delta$  avec  $\{\theta+p\} \times \mathbf{R}$  est exactement l'ensemble des points de  $\tilde{f}^q(\tilde{C}_\rho)$  d'abscisse  $\theta+p$ . De même  $\tilde{f}^{-q}(\Delta)$  est l'ensemble des points de  $\tilde{C}_\rho$  d'abscisse  $\theta$ .

La proposition 3.1 exprime que l'image par  $\tilde{f}^q$  du point de  $\tilde{f}^{-q}(\Delta)$  d'ordonnée la plus petite (resp. grande) est le point de  $\Delta$  d'ordonnée la plus grande (resp. petite), ce qui est exactement la conclusion de la proposition 4.1 exprimée dans le revêtement  $\tilde{A}$ . □

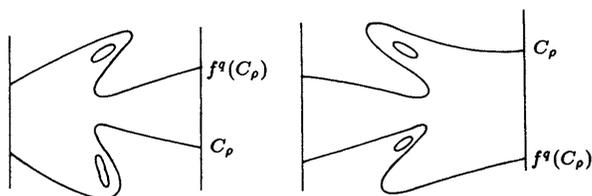


## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

### Remarques sur la proposition

i) Le dessin ci-dessous nous montre que pour tout point  $x$  de  $C_\rho^s$ , l'ensemble  $D^s(x) \cup f^{-q}(D^i(f^q(x)))$  est l'image d'un chemin qui traverse l'anneau en ne rencontrant  $C_\rho$  qu'au point  $x$ . Ainsi tout ensemble contenu dans  $C_\rho$  et séparant l'anneau doit contenir  $C_\rho^s$  et de même doit contenir  $C_\rho^i$ . En particulier il n'y a qu'une composante connexe de  $C_\rho$  qui sépare l'anneau, on la note  $\Gamma_\rho$ .

ii) La fonction  $p_2 \circ f^q - p_2$  s'annule sur  $C_\rho$  si et seulement si  $\tilde{f}$  a une orbite de type  $(p, q)$  et donc si et seulement si  $p/q$  appartient à  $\mathcal{R}(\tilde{f})$ . Dans le cas contraire elle garde un signe constant strict sur  $\Gamma_\rho$ , et comme cet ensemble contient  $C_\rho^s$  et  $C_\rho^i$ , la proposition 4.1 implique qu'il y a seulement deux cas.



Cas 1

Cas 2

Détaillons le premier cas où la fonction  $p_2 \circ f^q - p_2$  est strictement positive sur  $C_\rho$ .

- La réunion de  $f^q(U_{C_\rho})$  et de  $V_{C_\rho}$  est égale à  $\mathbf{A}$ .
- L'ensemble  $U_{\Gamma_\rho}$  contient  $U_{C_\rho}$  et est disjoint de  $V_{C_\rho}$ , il est contenu dans  $f^q(U_{C_\rho})$ .

## Patrice Le Calvez

– Les ensembles  $\Gamma_\rho$  et  $f(\Gamma_\rho)$  sont disjoints (théorème 2.4), ainsi  $f(\Gamma_\rho)$  est contenu dans  $U_{\Gamma_\rho}$  ou alors disjoint. Dans le premier cas  $f(U_{\Gamma_\rho})$  est inclus dans  $U_{\Gamma_\rho}$ , dans le second il le contient. Comme  $f^q(U_{\Gamma_\rho})$  contient  $U_{\Gamma_\rho}$ , c'est ce cas-ci qui est réalisé.

On déduit de ces propriétés que les ensembles

$$\bigcup_{n \geq 0} f^{qn}(U_{C_\rho}); \quad \bigcup_{n \geq 0} f^{qn}(U_{\Gamma_\rho}); \quad \bigcup_{n \geq 0} f^n(U_{\Gamma_\rho})$$

sont égaux. L'ensemble  $W_\rho$  obtenu est ouvert, invariant par  $f$ , homéomorphe à  $\mathbf{A}$  et contient un anneau de la forme  $\mathbf{T}^1 \times ]-\infty, M]$ .

iii) Supposons que l'on soit dans le premier cas étudié et que  $\Xi'$  soit un ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation  $\rho'$ . Comme cet ensemble est minimal, il est contenu dans  $W_\rho$  ou alors disjoint. Si il est disjoint de  $W_\rho$ , il l'est aussi de  $f^q(U_{C_\rho})$  et il est donc contenu dans  $V_{C_\rho}$ . Comme la fonction  $p_1 \circ \tilde{f}^q - p_1 - \rho$  est strictement positive sur  $\tilde{V}_{C_\rho}$ , le nombre de rotation  $\rho'$  est strictement supérieur à  $\rho$ . Si il est contenu dans  $W_\rho$ , il rencontre  $U_{C_\rho}$ , le nombre de rotation  $\rho'$  est cette fois-ci strictement inférieur à  $\rho$ . Notons que dans ce cas  $\Xi'$  est contenu dans l'ensemble  $W_\rho^o$  formé des points radialement accessibles de  $W_\rho$ .

iv) Indiquons une dernière remarque que l'on utilisera. Soit  $\Lambda$  un ensemble compact, connexe, séparant l'anneau et contenu dans  $C_\rho$ . Si  $\Lambda$  rencontre son image par  $f$ , alors  $\rho$  appartient à  $\mathcal{R}(\tilde{f})$  (théorème 2.4), sinon  $\rho$  n'appartient pas à  $\mathcal{R}(f)$ . En effet  $f(\Lambda)$  est alors contenu dans  $U_\Lambda$  ou dans  $V_\Lambda$ . Dans le premier cas  $f(U_\Lambda)$  est contenu dans  $U_\Lambda$  ainsi que tous les itérés  $(f^k(U_\Lambda))_{k \geq 1}$ . Comme  $f^q(\Lambda)$  est inclus dans  $f^{q-1}(U_\Lambda)$ , il est inclus dans  $U_\Lambda$  et ne rencontre pas  $\Lambda$ . Cette propriété est encore vraie dans le second cas, ainsi la fonction  $p_2 \circ f^q - p_2$  ne s'annule pas sur  $\Lambda$  et garde donc un signe

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

constant strict. Utilisant le fait que  $\Lambda$  contient  $C_\rho^i$  et  $C_\rho^s$  on obtient que  $p/q$  n'appartient pas à  $\mathcal{R}(\tilde{f})$ .

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME:

Commençons par une version faible.

LEMME 1. *Pour tout nombre rationnel  $\rho$  n'appartenant pas à  $\mathcal{R}'(f_o)$ , il existe un voisinage  $\mathcal{W}$  de  $\tilde{f}_o$  dans  $\mathcal{K}$  tel que  $\rho$  appartient à  $\mathcal{R}(\tilde{f})$  dès que  $\tilde{f}$  appartient à  $\mathcal{W}$ .*

DÉMONSTRATION: Supposons qu'il existe une suite  $(\tilde{f}_n)_{n \geq 1}$  d'éléments de  $\mathcal{K}$  convergeant vers  $\tilde{f}_o$  et deux entiers  $p \in \mathbf{Z}$  et  $q \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$  premiers entre eux tels que  $\rho = \frac{p}{q}$  n'appartienne jamais à  $\mathcal{R}(\tilde{f}_n)$  pour tout  $n \geq 1$ , et montrons que  $\rho$  appartient à  $\mathcal{R}'(\tilde{f}_o)$ . Définissons pour tout entier  $n \geq 0$  les ensembles:

$$\tilde{C}_n = \{x \in \tilde{\mathbf{A}} \mid p_1 \circ \tilde{f}_n^q(x) = p_1(x) + p\}$$

et  $C_n = \pi(\tilde{C}_n),$

ainsi que la composante connexe  $\Gamma_n$  de  $C_n$  qui sépare l'anneau. Notons également  $f_n$  l'élément de  $\mathcal{K}$  relevé par  $\tilde{f}_n$ .

Puisque  $\rho_n$  n'appartient pas à  $\mathcal{R}(f_n)$ ,  $f_n(\Gamma_n)$  est disjoint de  $U_{\Gamma_n}$  ou de  $V_{\Gamma_n}$ ; nous pouvons toujours supposer qu'il est disjoint de  $U_{\Gamma_n}$  pour tout entier  $n$ .

Puisque  $(\tilde{f}_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $\tilde{f}_o$ , la suite  $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$  est bornée (voir la démonstration de la proposition 2.1) et on peut toujours supposer qu'elle converge. Sa limite  $\Gamma$  est alors connexe, sépare l'anneau, est contenue dans  $C_\rho$  et son image par  $f_o$  ne sépare pas  $U_\Gamma$ , en particulier  $U_\Gamma$  est inclus dans  $f_o(U_\Gamma)$  et l'on peut considérer l'ensemble  $W = \bigcup_{k \geq 0} f_o^k(U_\Gamma)$  qui est ouvert, homéomorphe à  $\mathbf{A}$ , invariant par  $f$  et qui contient un anneau de la forme  $\mathbf{T}^1 \times ]-\infty, M]$ .

## Patrice Le Calvez

D'autre part comme  $\rho$  appartient à  $\mathcal{R}(f_o)$ ,  $f_o(\Gamma)$  rencontre  $\Gamma$  et les points d'intersection sont périodiques en particulier hors de  $W$ . Le graphe de cet ensemble est donc un graphe invariant et celui-ci rencontre  $\Lambda$  puisque  $\overline{U}_\Gamma$  et donc  $\overline{W}$  rencontrent  $\Gamma$  alors que  $W$  ne contient pas  $\Gamma$ . Le nombre de rotation de ce graphe est donc égal à  $\rho$ . □

### Suite de la démonstration du théorème 4.1

Nous venons de montrer le théorème dans le cas où  $Z$  se réduit à un rationnel, montrons le maintenant dans le cas général. Remarquons d'abord que l'on peut toujours supposer que  $Z$  est l'adhérence de  $Z \cap \mathbf{Q}$ , quitte à remplacer  $Z$  par  $Z_\varepsilon = \{\rho \in \mathbf{R} \mid d(\rho, Z) \leq \varepsilon\}$ , ceci parce que  $\mathcal{R}'(f_o)$  est fermé. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite  $(\tilde{f}_n)_{n \geq 1}$  d'éléments de  $\tilde{\mathcal{K}}$  convergeant vers  $\tilde{f}_o$  et une suite  $(\rho_n)_{n \geq 1}$  d'éléments de  $Z$  telle que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\rho_n$  n'appartienne pas à  $\mathcal{R}(\tilde{f}_n)$ . Puisque  $\mathcal{R}(\tilde{f})$  est toujours fermé quand  $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{K}}$  on peut supposer les  $\tilde{\rho}_n$  tous rationnels. On écrit  $\rho_n = \frac{p_n}{q_n}$  où  $p_n \in \mathbf{Z}$  et  $q_n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$  sont premiers entre eux, et on définit:

$$\begin{aligned}\tilde{C}_n &= \{x \in \tilde{\mathbf{A}} \mid p_1(\tilde{f}_n^{q_n}(x)) = p_1(x) + p_n\}, \\ C_n &= \pi(\tilde{C}_n),\end{aligned}$$

et la composante connexe  $\Gamma_n$  de  $C_n$  qui sépare l'anneau. Puisque  $f_n(\Lambda_n)$  ne rencontre pas  $\Lambda_n$ , on peut supposer qu'il est disjoint de  $U_{\Lambda_n}$  et donc que  $U_{\Lambda_n}$  est contenu dans  $f_n(U_{\Lambda_n})$  pour tout entier. On peut également supposer que la suite  $(\rho_n)_{n \geq 1}$  converge vers un réel  $\rho \in Z$ .

Nous allons montrer que  $\rho$  appartient à  $\mathcal{R}'(f_o)$  par une méthode identique à celle du lemme 1. Remarquons la différence: dans le

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

lemme 1 la suite  $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$  était bornée et on a pu prendre une valeur d'adhérence. Ici ce n'est pas le cas car la suite  $(q_n)_{n \geq 1}$  formée des dénominateurs n'est pas bornée, on va donc raisonner avec la suite  $(W_n)_{n \geq 1}$ , où  $W_n = \bigcup_{k \geq 0} f_n^k(U_{\Gamma_n})$  est un ouvert annulaire invariant par  $f_n$ , en cherchant une limite à cette suite. Pour cela il suffit de compactifier l'anneau  $\mathbf{A}$  en rajoutant les deux bouts  $N$  et  $S$ . Tout élément  $f$  de  $\mathcal{K}$  se prolonge en un homéomorphisme de  $S^2 = \mathbf{A} \cup \{N, S\}$  laissant fixes les deux bouts, la suite  $(\hat{f}_n)_{n \geq 1}$  converge alors uniformément vers  $\hat{f}_o$ . Chacun des ensembles  $\hat{W}_n = W_n \cup \{S\}$  et  $\hat{X}_n = S^2 \setminus \hat{W}_n$  est invariant par  $\hat{f}_n$ . La suite  $(\hat{X}_n)_{n \geq 1}$  est formée d'ensembles compacts et connexes, contenant  $N$ , on peut toujours supposer qu'elle converge vers un élément  $\hat{X}$  ayant les mêmes propriétés. Étudions de plus près cet ensemble.

LEMME 2. *Les ensembles  $\hat{X}$  et  $\{N\}$  sont distincts.*

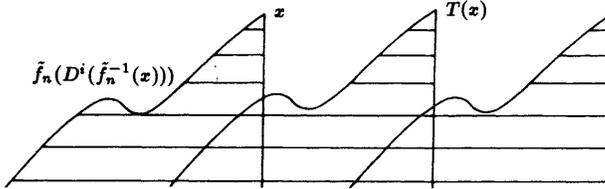
DÉMONSTRATION: Soit  $\rho^s$  un élément de  $\mathbf{Q} \setminus \mathcal{R}'(\tilde{f}_o)$  strictement supérieur à  $\rho$ . D'après le lemme 1, il existe pour  $n$  assez grand un ensemble d'Aubry-Mather  $\Xi_n^s$  de  $\tilde{f}_n$  de nombre de rotation  $\rho^s$ , qui est disjoint de  $W_n$  (voir la remarque iv) à la suite de la proposition 4.1). Comme la suite  $(\Xi_n^s)_{n \geq 1}$  est bornée (voir proposition 2.1), toute valeur d'adhérence  $\Xi_o^s$  est contenue dans  $\hat{X}$  qui ne se réduit pas à  $\{N\}$ . □

LEMME 3. *Le point  $S$  n'appartient pas à  $\hat{X}$ .*

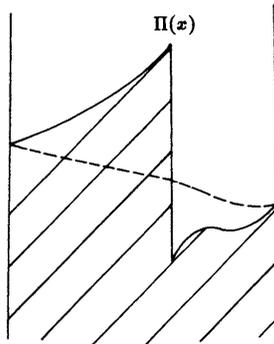
DÉMONSTRATION: Soit  $\rho^i$  un élément de  $\mathbf{Q} \setminus \mathcal{R}'(\tilde{f}_o)$  strictement inférieur à  $\rho$ . Pour  $n$  assez grand il existe un ensemble d'Aubry-Mather  $\Xi_n^i$  de  $\tilde{f}_n$ , cette fois-ci contenu dans  $W_n$ , et plus précisément formé de points radialement accessibles. Si  $x$  appartient à  $\Xi_n^i$ , la

Patrice Le Calvez

courbe  $\tilde{f}_n(D^i(\tilde{f}_n^{-1}(x)))$  est contenue dans  $\tilde{W}_n$  ainsi que l'ouvert hachuré ci-dessous



qui se projette ainsi dans l'anneau.



Comme la suite  $(\Xi_n^i)_{n \geq 1}$  est bornée, elle admet une valeur d'adhérence  $\Xi_o^i$ . Si on choisit  $x$  dans  $\Xi_o^i$  l'ensemble hachuré dessiné ci-dessous pour ce point et pour  $\hat{f}_o$  sera disjoint de  $\hat{X}$ .  $\square$

FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME: Puisque  $S$  n'appartient pas à  $\hat{X}$ , on peut définir la composante connexe  $\hat{W}$  de  $S^2 \setminus \hat{X}$  qui contient  $S$ . Celle ci est simplement connexe ainsi  $W = \hat{W} \setminus \{S\}$  vérifie toutes les conditions du théorème 3.1 et sa frontière est un

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

graphe. Les ensembles  $\Xi_o^i$  et  $\Xi_o^s$  définis dans les lemmes 2 et 3 sont situés de part et d'autre de ce graphe et le nombre de rotation de celui-ci compris entre  $\rho^i$  et  $\rho^s$ . Comme ces réels peuvent être choisis arbitrairement proches de  $\rho$ , c'est le nombre de rotation de la courbe.  $\square$

### Exemple

Considérons  $\varphi_o$  dans  $C^1(\mathbf{T}^1)$  avec  $\int_0^1 \varphi_o(\theta) d\theta = 0$ . L'application  $\tilde{f}_{\varphi_o}^1 : (\theta, r) \mapsto (\theta + r, r + \varphi_o(\theta + r))$ , définie au chapitre 1, préserve l'aire et a un flux nul. Sous certaines conditions  $\tilde{f}_{\varphi_o}^1$  n'a pas de graphe invariant, par exemple s'il existe  $\theta$  avec  $\varphi_o'(\theta) \leq -2$  (voir [He]). Si c'est le cas le théorème 4.1 implique que  $R(\tilde{f}_{\varphi}^1)$  contient  $[0, 1]$  dès que  $\varphi$  est proche de  $\varphi_o$  pour la topologie de la convergence uniforme. En fait  $R(\tilde{f}_{\varphi}^1)$  est alors égal à  $\mathbf{R}$ , en effet l'ensemble  $\Xi_k = \{(\theta, r + k), (\theta, r) \in \Xi\}$  est un ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation  $\rho + k$  quand  $k$  est entier si  $\Xi$  est un ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation  $\rho$ .

## Chapitre 5

### ÉTUDE DES RÉGIONS D'INSTABILITÉ

Nous allons voir comment les résultats du Chapitre 3 permettent de comprendre certains aspects de la dynamique des régions d'instabilité.

Nous supposons que  $f$  est un élément de  $\mathcal{K}$  qui préserve l'aire, qui laisse invariant les graphes notés respectivement  $C^i$  et  $C^s$  de deux fonctions continues  $\psi^i$  et  $\psi^s$  de  $\mathbf{T}^1$  dans  $\mathbf{R}$  vérifiant  $\psi^i < \psi^s$  et qui n'admet pas d'autre graphe invariant dans la couronne

$$C = \{(\theta, r) \in \mathbf{A} \mid \psi^i(\theta) \leq r \leq \psi^s(\theta)\}$$

délimitée par  $C^i$  et  $C^s$ .

Nous montrerons les deux résultats suivants (voir [L 2]) dont la démonstration originale est due à J. Mather et utilise les méthodes variationnelles esquissées au Chapitre 2.

**THÉORÈME 5.1.** *Il existe un point  $x$  de  $C$  tel que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^{-n}(x), C^s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(x), C^i) = 0.$$

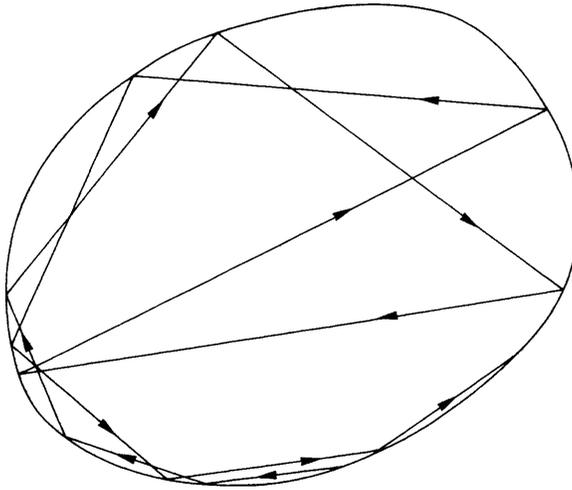
**THÉORÈME 5.2.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $x$  dans  $C$  tel que:*

$$\begin{cases} d(x, C^i) < \varepsilon \\ \lim_{n \rightarrow \pm\infty} d(f^n(x), C^s) = 0. \end{cases}$$

Illustrons tout de suite ces résultats dans le cas du billard. Supposons que  $\Gamma$  soit une courbe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , convexe telle que la

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

courbure s'annule en un point et considérons l'homéomorphisme  $f$  de  $\mathbf{T}^1 \times [0, \pi]$  défini dans le premier chapitre qui lui est associé. ( $f$  n'est pas différentiable sur le bord mais cela ne change rien au résultat). Dans ce cas Mather a prouvé qu'il n'y avait pas de graphes invariants autres que les deux bords [Ma 2], et que la couronne  $\mathbf{T}^1 \times [0, \pi]$  était par conséquent une région d'instabilité. Le théorème 5.1 exprime qu'il existe une orbite qui dans le passé ou dans le futur se rapproche de la courbe  $\Gamma$  en s'enroulant dans des sens contraires.



Par contre si la courbure ne s'annule pas et si  $k$  est supérieur à 6 cette situation ne peut pas se produire; il y a des graphes invariants aussi près que l'on veut du bord, si l'angle est très petit en un point, il reste assez petit tout au long de l'orbite (voir R. Douady [D]).

## Patrice Le Calvez

La démonstration des théorèmes 5.1 et 5.2 est basée sur le principe suivant: on construit pour chacun des bords un ensemble stable et un ensemble instable local, analogue aux variétés et instables locales des points fixes hyperboliques par une construction due à Birkhoff [Bi 1, Bi 4], on construit ensuite des ensembles stables et instables globaux pour chacun des bords. Les théorèmes apparaissent alors comme des propriétés d'intersection hétérocline pour le premier et homocline pour le second. Nous utiliserons la version suivante de la théorie de Birkhoff.

**PROPOSITION 5.1.** *Si  $X$  est une partie fermée et connexe de  $C$  invariante par  $f$  et séparant l'anneau, alors:*

- soit  $X$  est égal à  $C^i$ ,
- soit  $X$  est égal à  $C^s$ ,
- soit  $X$  contient  $C^i$  et  $C^s$ .

**DÉMONSTRATION:** Le flux de  $f$  est nul puisqu'il y a un graphe invariant. La composante inférieure  $U_X$  de  $A \setminus X$  vérifie donc les hypothèses du théorème 3.1; sa frontière est un graphe invariant compris entre  $C^i$  et  $C^s$ . Ainsi, soit  $X$  contient  $C^i$ , soit il est égal à  $C^s$ . De même, soit il contient  $C^s$  soit il est égal à  $C^i$ , or ceci est exactement l'énoncé de la proposition.  $\square$

**DÉMONSTRATION DU THÉORÈME:** Commençons par un lemme du à Birkhoff [Bi 3].

**LEMME 1.** *Si  $W$  est un voisinage connexe de  $C^s$  dans  $C$ , alors  $C^i$  est contenu dans l'adhérence de  $\bigcup_{n \geq 0} f^n(W)$  et dans celle de*

$$\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W).$$

**DÉMONSTRATION:** On peut toujours supposer  $W$  ouvert, dans ce

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

cas les ensembles  $O = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} f^n(W)$  et  $O' = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} f^k(W)$  ont même mesure. En effet  $O' = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} f^{-n}(O)$  est une réunion croissante d'ouverts de  $C$  ayant même mesure, celle de  $O$ . Comme  $O$  et  $O'$  sont deux ouverts de  $C$  ayant même mesure et comme  $O$  est inclus dans  $O'$ , ils ont même adhérence qui est également celle de  $O'' = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W)$ . Celle-ci est connexe, invariante par  $f$  puisque c'est le cas de  $O'$ , elle sépare l'anneau et a un intérieur non vide, elle contient donc  $C^i$  par la proposition 5.1.  $\square$

Construisons maintenant les ensembles stables et instables des deux bords. Appellons  $\mathcal{D}$  l'ensemble des applications  $\psi: \mathbf{T}^1 \rightarrow \mathbf{R}$  continues telles que  $\psi' < \psi < \psi^s$  et pour tout  $\psi$  appartenant à  $\mathcal{D}$ , définissons les ensembles

$$C_\psi^s = \{(\theta, r) \in \mathbf{A}; \psi(\theta) \leq r \leq \psi^s(\theta)\}$$

et

$$C_\psi^i = \{(\theta, r) \in \mathbf{A}; \psi^i(\theta) \leq r \leq \psi(\theta)\}.$$

L'ensemble  $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} f^n(C_\psi^s)$  est fermé, nous notons  $A_\psi^s$  la composante connexe qui contient  $C_\psi^s$ . Remplaçant  $C_\psi^s$  par  $C_\psi^i$  nous obtenons de même un fermé  $A_\psi^i$ , remplaçant  $f$  par  $f^{-1}$  nous obtenons  $\Omega_\psi^s$  et  $\Omega_\psi^i$ . Nous avons le lemme suivant et des résultats analogues avec les autres ensembles.

LEMME 2.

- i) L'ensemble  $f^{-1}(A_\psi^s)$  est inclus dans  $A_\psi^s$ ,
- ii) l'ensemble  $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} f^{-n}(A_\psi^s)$  est égal à  $C^s$ ,
- iii) le graphe de  $\psi$  rencontre  $A_\psi^s$ .

## Patrice Le Calvez

DÉMONSTRATION: La propriété i) est une conséquence de la définition de  $A_\psi^s$ , la propriété ii) une conséquence de la proposition

5.1:  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(A_\psi^s)$  est fermé, connexe, invariant par  $f$  et il sépare

$A$  puisqu'il contient  $C^s$ ; comme il ne contient pas  $C^i$ , il est égal à  $C^s$ .

Pour montrer la propriété iii) nous raisonnons par l'absurde. Si  $A_\psi^s$  ne rencontre pas le graphe de  $\psi$ , il existe un entier  $M$  tel que

pour tout  $m \geq M$  la composante connexe  $A_{\psi, m}^s$  de  $\bigcap_{0 \leq n \leq m} f^n(C_\psi^s)$

qui contient  $C^s$  ne rencontre pas le graphe de  $\psi$ . L'ensemble  $A_{\psi, M}^s$  étant un voisinage de  $C^s$  on peut définir grâce au lemme

1 le premier entier  $k$  que l'on notera  $K$  tel que  $f^k(A_{\psi, M}^s)$  rencontre le graphe de  $\psi$ . L'ensemble  $f^K(A_{\psi, M}^s)$  est contenu à la fois

dans  $\bigcap_{0 \leq k < K} f^{K-k}(C_\psi^s)$  et dans  $\bigcap_{K \leq n \leq M+K} f^n(C_\psi^s)$ , c'est-à-dire dans

$\bigcap_{1 \leq n \leq M+K} f^n(C_\psi^s)$ . Puisqu'il est connexe et qu'il rencontre le graphe

de  $\psi$ , la composante connexe de  $f^K(A_{\psi, M}^s) \cap C_\psi^s$ , qui est contenue

dans  $\bigcap_{0 \leq n \leq M+K} f^n(C_\psi^s)$  rencontre le graphe de  $\psi$  et ceci contredit

l'hypothèse faite sur l'entier  $M$ . □

Nous obtenons une famille d'ensembles instables locaux, indexés par les éléments de  $\mathcal{D}$  analogues aux variétés instables locales  $W_e^u(x)$  d'un point fixe hyperbolique. Les propriétés suivantes sont claires:

- i) si  $\psi' \leq \psi$  alors  $A_\psi^s \subset A_{\psi'}^s$ ;
- ii) pour tout  $\psi \in \mathcal{D}$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe  $\psi' \in \mathcal{D}$  tel que  $f^k(A_\psi^s) \subset A_{\psi'}^s$ ;

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

iii) pour tout  $\psi \in \mathcal{D}$  et  $\psi' \in \mathcal{D}$ , il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que

$$A_{\psi'}^s \subset f^k(A_{\psi}^s).$$

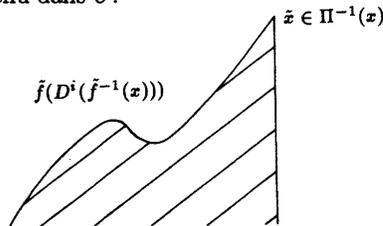
On peut donc définir l'ensemble instable global par les égalités

$$A^s = \bigcup_{\psi \in \mathcal{D}} A_{\psi}^s = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(A_{\psi_0}^s) \quad \text{où } \psi_0 \in \mathcal{D},$$

il est connexe, invariant par  $f$  et son adhérence contient  $C^i$  comme conséquence de la proposition 5.1. On définit de la même façon les ensembles  $A^i$ ,  $\Omega^s$  et  $\Omega^i$ .

(QUESTION: tout point  $x \in C$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^{-n}(x), C^s) = 0$  est-il contenu dans  $A^s$  ?)

Pour montrer que certains de ces ensembles se rencontrent, essayons de les décrire de façon plus précise. Considérons la composante connexe inférieure  $U$  de  $C \setminus A_{\psi}^s$  et gardons les notations introduites au Chapitre 3. Puisque  $f(U)$  est contenu dans  $U$ ,  $f(U^+)$  est contenu dans  $U^+$ , lui-même inclus dans  $\overline{U^+}$ . En effet, la suite  $(f^{-k}(W))_{k \geq 1}$  où  $W = U^+ \setminus \overline{f(U^+)}$  est formée d'ouverts disjoints deux-à-deux, disjoints également de  $U^+$  et contenus dans  $U$ . Puisque  $U$  est majoré et puisque  $f$  préserve l'aire,  $W$  est vide. Comme  $f^{-1}(U^o)$  est inclus dans  $(f^{-1}(U))^-$  et comme  $U^+$  est inclus dans  $(f^{-1}(U))^+$ , l'ensemble  $f^{-1}(U^o) \cap U^+$  est inclus dans  $(f^{-1}(U))^o$ . Ainsi si  $x$  appartient à  $U^o \cap f(U^+)$ , l'ensemble ouvert hachuré ci-dessous est contenu dans  $U$ .

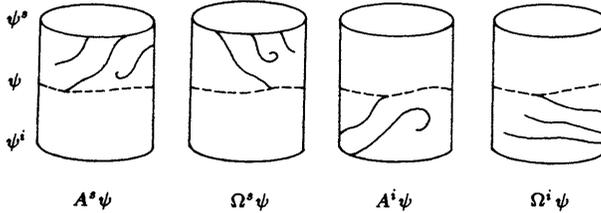


## Patrice Le Calvez

Comme  $U^\circ$  est contenu dans  $\overline{f(U^+)}$  et ouvert,  $U^\circ \cap f(U^+)$  est dense dans  $U^\circ$ , ainsi la propriété précédente est vraie pour tous les points  $x$  de  $U^\circ$ . On en déduit que  $\mu_u$  est continue à droite, plus précisément:

$$\theta < \theta' \Rightarrow \mu_u(\theta') - \mu_u(\theta) \leq \cotg \beta(\theta' - \theta).$$

Pour les autres ensembles, on raisonne de façon analogue pour obtenir les figures suivantes.



On comprend alors pourquoi  $A_\psi^s$  et  $\Omega_\varphi^i$  se rencontrent dès que  $\psi$  et  $\varphi$  sont proches respectivement de  $\psi^i$  et de  $\psi^s$  (théorème 5.1) et pourquoi  $A_\psi^s$  et  $\Omega_\psi^s$  ont des points d'intersection proches de  $C^i$  (théorème 5.2).

Pour montrer rigoureusement ces résultats nous allons faire varier  $\psi$  et  $\varphi$  dans  $\mathcal{D}$  et utiliser des arguments de continuité ou plutôt de semi-continuité sur les applications de  $\mathbf{T}^1$  dans  $\mathbf{R}$  suivantes:

$$\alpha_\psi^s: \theta \mapsto \alpha_\psi^s(\theta) = \inf\{r \in \mathbf{R} \mid (\theta, r) \in A_\psi^s\},$$

$$\omega_\psi^s: \theta \mapsto \omega_\psi^s(\theta) = \inf\{r \in \mathbf{R} \mid (\theta, r) \in \Omega_\psi^s\},$$

$$\alpha_\psi^i: \theta \mapsto \alpha_\psi^i(\theta) = \sup\{r \in \mathbf{R} \mid (\theta, r) \in A_\psi^i\},$$

$$\omega_\psi^i: \theta \mapsto \omega_\psi^i(\theta) = \sup\{r \in \mathbf{R} \mid (\theta, r) \in \Omega_\psi^i\}.$$

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

Examinons les principales propriétés de ces applications. La première est une conséquence du lemme 2.

P.1: nous avons les inégalités larges suivantes,  
mais pas les inégalités strictes correspondantes

$$\alpha_{\psi}^i \leq \psi \leq \alpha_{\psi}^s; \quad \omega_{\psi}^i \leq \psi \leq \omega_{\psi}^s.$$

La seconde du caractère fermé de nos ensembles

P.2:  $\begin{cases} \alpha_{\psi}^i \text{ et } \omega_{\psi}^i \text{ sont semi-continues supérieurement,} \\ \alpha_{\psi}^s \text{ et } \omega_{\psi}^s \text{ sont semi-continues inférieurement.} \end{cases}$

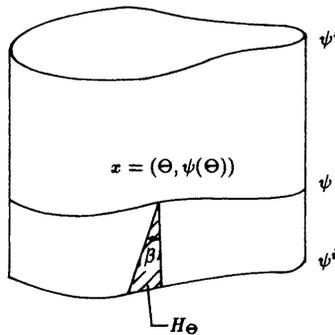
La troisième vient d'être démontrée

P.3:  $\begin{cases} \alpha_{\psi}^i \text{ et } \omega_{\psi}^s \text{ sont continues à gauche,} \\ \alpha_{\psi}^s \text{ et } \omega_{\psi}^i \text{ sont continues à droite.} \end{cases}$

Il reste une quatrième propriété.

P.4: pour tout  $\psi \in \mathcal{D}$ , il existe  $\varphi \in \mathcal{D}$  tel que  $\alpha_{\varphi}^+ \leq \psi$   
et  $\omega_{\varphi}^+ \leq \psi$ .

Montrons cette dernière et pour cela supposons  $\psi$  assez proche de  $\psi^i$  pour que les ensembles  $H_{\theta}$  dessinés ci-dessous soient définis sans ambiguïté pour tout  $\theta \in \mathbb{T}^1$ .



**Patrice Le Calvez**

Puisque  $C^i$  est contenu dans l'adhérence de  $A^s = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{D}} A_\varphi^s$ , il existe  $\varphi \in \mathcal{D}$  tel que  $A_\varphi^s$  rencontre tous les ouverts  $H_\theta$ . L'inégalité sur  $\alpha_\varphi^+$  ( $= \mu_u$ ) montrée plus haut implique que  $\alpha_\varphi^+(\theta)$  est inférieur à  $\psi(\theta)$ . L'autre relation s'en déduit aussitôt.

**DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2:** Soit  $\varepsilon > 0$ , choisissons deux éléments  $\psi$  et  $\varphi$  de  $\mathcal{D}$  tels que

$$\psi^i < \psi \leq \psi^i + \varepsilon; \quad \alpha_\varphi^s \leq \psi; \quad \omega_\varphi^s \leq \psi;$$

et montrons par l'absurde que les graphes de  $\alpha_\varphi^s$  et de  $\omega_\varphi^s$  se rencontrent, ce qui prouvera le théorème. Écrivons dans le cas contraire  $\mathbf{T}^1 = I \cup \mathcal{J}$  où

$$I = \{\theta \in \mathbf{T}^1 \mid \alpha_\varphi^s(\theta) < \omega_\varphi^s(\theta)\} \quad \text{et}$$

$$\mathcal{J} = \{\theta \in \mathbf{T}^1 \mid \omega_\varphi^s(\theta) < \alpha_\varphi^s(\theta)\}.$$

Puisque  $\alpha_\varphi^s$  est continue à droite et  $\omega_\varphi^s$  semi-continue inférieurement, l'ensemble  $I$  est ouvert à droite (i.e. pour tout  $\theta \in I$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $[\theta, \theta + \eta[ \subset I$ ), puisque  $\omega_\varphi^s$  est continue à gauche et  $\alpha_\varphi^s$  semi-continue inférieurement,  $\mathcal{J}$  est ouvert à gauche. Mais la propriété P.1 énoncée plus haut nous dit qu'aucun des ensembles  $I$  et  $\mathcal{J}$  n'est vide. Il est facile de montrer qu'une partition de  $\mathbf{T}^1$  en deux ensembles, l'un ouvert à droite, l'autre ouvert à gauche, est impossible.  $\square$

**DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1:** Raisonnons par l'absurde. Si le théorème est faux, les ensembles  $A_\varphi^s$  et  $\Omega_\psi^i$  ne se rencontrent pas

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

si  $\varphi$  et  $\psi$  sont dans  $\mathcal{D}$ , et on peut écrire  $\mathbf{T}^1 = I \cup \mathcal{J}$  avec:

$$I = \{\theta \in \mathbf{T}^1 \mid \omega_{\psi}^i(\theta) < \alpha_{\varphi}^s(\theta)\}$$

et  $\mathcal{J} = \{\theta \in \mathbf{T}^1 \mid \alpha_{\varphi}^s(\theta) < \omega_{\psi}^i(\theta)\}.$

Puisque  $\alpha_{\varphi}^s$  et  $\omega_{\psi}^i$  sont respectivement semi-continue inférieurement et semi-continue supérieurement,  $I$  est ouvert; puisque  $\alpha_{\varphi}^s$  et  $\omega_{\psi}^i$  sont continues à droite  $\mathcal{J}$  est ouvert à droite. Une partition de  $\mathbf{T}^1$  en ces deux ensembles est impossible, donc l'un est égal à  $\mathbf{T}^1$ .

Si on fixe  $\psi \in \mathcal{D}$ , on peut donc écrire  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$  où

$$\mathcal{D}_1 = \{\varphi \in \mathcal{D} \mid \omega_{\psi}^i < \alpha_{\varphi}^s\}$$

et  $\mathcal{D}_2 = \{\varphi \in \mathcal{D} \mid \alpha_{\varphi}^s < \omega_{\psi}^i\}.$

Pour obtenir une contradiction munissons  $\mathcal{D}$  de la topologie de la convergence uniforme.

Ni  $\mathcal{D}_1$  ni  $\mathcal{D}_2$  ne sont égaux à  $\mathcal{D}$ , en effet d'une part  $\psi$  n'appartient pas à  $\mathcal{D}_2$ , d'autre part on peut trouver  $\varphi \in \mathcal{D}$  avec  $\alpha_{\varphi}^s \leq \psi$  et  $\theta \in \mathbf{T}^1$  tel que  $\omega_{\psi}^i(\theta) = \psi(\theta)$ .

Si  $\varphi \in \mathcal{D}_1$  il existe  $\theta_o$  tel que  $\varphi(\theta_o) > \omega_{\psi}^i(\theta_o)$ , cette égalité est encore vraie pour  $\varphi'$  dans un voisinage de  $\varphi$ , celui-ci est donc disjoint de  $\mathcal{D}_2$  et donc contenu dans  $\mathcal{D}_1$ , ce dernier ensemble est donc ouvert.

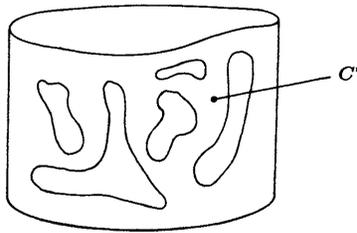
Si  $\varphi \in \mathcal{D}_2$  il existe  $a > 0$  tel que  $\alpha_{\varphi}^s < \omega_{\psi}^i - a$ , puisque par hypothèse  $A_{\varphi}^+$  et  $\Omega_{\varphi}^-$  sont fermés et ne se rencontrent pas. En particulier  $\varphi < \omega_{\psi}^- - a$  et pour  $\varphi'$  dans un voisinage de  $\varphi$  on a  $\varphi' < \omega_{\psi}^- - \frac{a}{2}$ . Comme  $\varphi'$  et  $\alpha_{\varphi}^s$  coïncident en un point ce voisinage est disjoint de  $\mathcal{D}_1$  et donc contenu dans  $\mathcal{D}_2$  qui est ouvert. Puisque  $\mathcal{D}$  est connexe on a une contradiction.  $\square$

**D'autres résultats sur les régions d'instabilité**

Enonçons quelques résultats supplémentaires sur les régions d'instabilité.

Dans le cas où  $f$  vérifie les conditions génériques du paragraphe 2.4, on peut par une utilisation répétée de la proposition 5.1 étudier de plus près les ensembles  $A^-$ ,  $A^+$ ,  $\Omega^-$  et  $\Omega^+$  (voir [L 3]).

Ces quatre ensembles ont une adhérence commune notée  $C^*$ . Cet ensemble contient pour tout nombre rationnel un ensemble d'Aubry-Mather hyperbolique et c'est l'adhérence commune des variétés stables et instables de celui-ci. Il contient également tous les ensembles d'Aubry-Mather de nombre de rotation irrationnel. En fait c'est le plus petit élément pour l'inclusion de l'ensemble des parties compactes connexes de  $C$  séparant l'anneau et invariante par  $f$ .



C'est sur cet ensemble, le squelette de la région d'instabilité, que ce retrouve la dynamique étudiée précédemment, son com-

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

plémentaire est formé d'ouverts connexes et simplement connexes périodiques qui sont bornés dans le revêtement  $\tilde{\mathbf{A}}$  et à une distance strictement positive de chacun des bords. On retrouvera un ensemble du même type dans le cas dissipatif, "l'attracteur de Birkhoff".

Il y a un grand nombre d'intersections homoclines, on en déduit qu'il y a beaucoup d'orbites non ordonnées périodiques et que l'entropie topologique est positive. En fait ces deux résultats sont vrais sans aucune hypothèse générique.

**THÉORÈME 5.4.** (Boyland [Bo 2]) *Si  $f \in \mathcal{H}$  a une orbite de type  $(p, q)$  qui ne correspond pas à un ensemble d'Aubry-Mather, son entropie topologique est strictement positive.*

**THÉORÈME 5.3.** (Boyland, Hall [BH]) *Si  $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{H}}$  préserve l'aire et a un flux nul et si  $\rho$  est un nombre irrationnel qui n'est pas dans  $\mathcal{R}'(\tilde{f})$ , alors pour tout nombre  $p/q$  rationnel proche de  $\rho$ ,  $\tilde{f}$  a une orbite de type  $(p, q)$  qui ne correspond pas à un ensemble d'Aubry-Mather.*

Les propriétés sur l'aire n'apparaissent pas dans le théorème précédent, indiquons rapidement les raisons de ce résultat. Si  $O(x)$  est une orbite de  $f$  de type  $(p, q)$  on peut regarder la restriction de  $f$  à la variété  $\mathbf{A} \setminus O(x)$  et utiliser le théorème de classification des difféomorphismes des surfaces de Thurston. C'est un difféomorphisme irréductible; si l'orbite est bien ordonnée il est isotope à un difféomorphisme périodique, sinon il est isotope à un

## Patrice Le Calvez

difféomorphisme pseudo-Anosov, en particulier il y a de l'entropie topologique.

Notons qu'il existe une démonstration simple du théorème 5.4 (Angenent [An]).

## Chapitre 6

### LES ATTRACTEURS DE BIRKHOFF

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux difféomorphismes de l'anneau dissipatifs et déviant la verticale, plus précisément aux éléments  $f$  de  $\mathcal{K}$  vérifiant:

- i) pour tout  $x \in \mathbf{A}$ ,  $0 < \det Df_x < 1$ ,
- ii) il existe  $M > 0$  tel que  $f(\mathbf{T}^1 \times [-M, M]) \subset \mathbf{T}^1 \times ]-M, M[$ .

Nous noterons  $\mathcal{K}^*$  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{K}$  vérifiant ces deux conditions et  $\tilde{\mathcal{K}}^*$  l'ensemble de leurs relèvements. Rappelons que l'on obtient de telles applications dans l'étude du pendule amorti et dans l'étude des familles  $\tilde{f}_\varphi^\lambda: (\theta, r) \mapsto (\theta + r, \lambda r + \varphi(\theta + r))$  où  $\varphi \in C^1(\mathbf{T}^1)$  et  $\lambda \in ]0, 1[$ .

Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{K}^*$  et  $M$  un réel tel que  $f(\mathbf{T}^1 \times [-M, M])$  soit inclus dans  $\mathbf{T}^1 \times ]-M, M[$ . Chacun des ensembles  $f^k(\mathbf{T}^1 \times [-M, M])$  étant compact, connexe, et séparant l'anneau, il en est de même de  $X = \bigcap_{k \geq 0} f^k(\mathbf{T}^1 \times [-M, M])$ , qui est de plus in-

variant. Pour comprendre la dynamique de  $f$  sur  $X$  nous étudierons plus généralement les ensembles compacts, connexes, qui séparent l'anneau et qui sont invariants par  $f$ , et noterons  $\mathcal{X}^*(f)$  la partie fermée de  $\mathcal{X}$  formée de tous ces ensembles (voir §2.1). La plupart des résultats qui suivent se trouvent dans [Bi 3] ou dans [L 4].

Le premier résultat provient du caractère dissipatif de  $f$ .

**Patrice Le Calvez**

**PROPOSITION 6.1.** *i) L'ensemble  $\mathcal{X}^*(f)$  contient un plus petit élément noté  $\Lambda(f)$  pour l'inclusion,*

*ii) si  $X$  appartient à  $\mathcal{X}^*(f)$  alors  $\Lambda(f) = \overline{U}_X \cap \overline{V}_X$ , en particulier  $\Lambda(f) = \text{Fr } U_{\Lambda(f)} = \text{Fr } V_{\Lambda(f)}$ .*

**DÉMONSTRATION:** Si  $X$  appartient à  $\mathcal{X}^*(f)$ , le complémentaire de  $U_X \cup V_X$  est la réunion de  $X$  et des composantes bornées de  $\mathbf{A} \setminus X$ , c'est un ensemble compact invariant par  $f$ . Puisque  $f$  décroît les aires il est de mesure nulle et d'intérieur vide, ainsi  $\mathbf{A} \setminus X$  n'a pas de composante bornée. Si  $X'$  est un autre élément de  $\mathcal{X}^*(f)$ ,  $U_X \cap V_{X'}$  est ouvert borné et invariant par  $f$ , il est donc vide; ainsi les ensembles

$$U = \bigcup_{X \in \mathcal{X}^*(f)} U_X \quad \text{et} \quad V = \bigcup_{X \in \mathcal{X}^*(f)} V_X$$

sont ouverts, connexes, invariants par  $f$  et sont disjoints. Le complémentaire  $\Lambda$  de  $U \cup V$  est compact, sépare l'anneau et est inclus dans tout élément de  $\mathcal{X}^*(f)$ . Pour montrer que c'est lui-même un élément de  $\mathcal{X}^*(f)$  il suffit de remarquer qu'il contient la frontière de la composante connexe non bornée de  $\mathbf{A} \setminus \overline{U}$  qui est un élément de  $\mathcal{X}^*(f)$ .

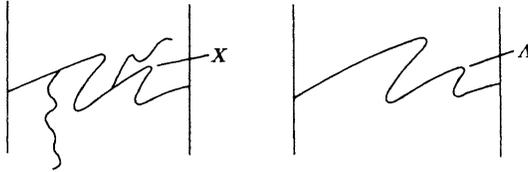
Soit  $X$  un élément de  $\mathcal{X}^*(f)$ . Puisque  $\text{Fr } U_X$  et  $\text{Fr } V_X$  appartiennent à  $\mathcal{X}^*(f)$ ,  $\Lambda(f)$  est contenu dans  $\text{Fr } U_X \cap \text{Fr } V_X = \overline{U}_X \cap \overline{V}_X$ . D'autre part

$$\overline{U}_X \cap \overline{V}_X \subset \overline{U}_{\Lambda(f)} \cap \overline{V}_{\Lambda(f)} = \text{Fr } U_{\Lambda(f)} \cap \text{Fr } V_{\Lambda(f)} \subset \Lambda(f).$$

La dernière égalité  $\Lambda(f) = \text{Fr } U_{\Lambda(f)} \cap \text{Fr } V_{\Lambda(f)}$  est maintenant évidente. □

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

L'ensemble  $\Lambda(f)$  sera appelé l'attracteur de Birkhoff de  $f$ . Ce n'est pas toujours un attracteur mais c'est cependant sur cet ensemble que la dynamique de  $f$  sera intéressante.



Utilisons maintenant le fait que  $f$  dévie la verticale et appliquons les résultats du Chapitre 3 (théorèmes 3.2 et 3.3). Fixons un relèvement  $\tilde{f}$  de  $f$  et un élément  $X$  de  $\mathcal{X}^*(f)$ . Rappelons que  $U_X^o$  est l'ensemble des points radialement accessibles, que  $U_X^-$  et  $U_X^+$  sont les ensembles des points accessibles par un chemin négatif et positif et que

$$X^i = \{x \in X \mid D^i(x) \cap X = \{x\}\}$$

et

$$X^s = \{x \in X \mid D^s(x) \cap X = \{x\}\}$$

sont les graphes de deux fonctions  $\mu_X^i$  et  $\mu_X^s$  de  $\mathbf{T}^1$  dans  $\mathbf{R}$ .

PROPOSITION 6.2. i) Les ensembles  $U_X^o$  et  $U_X^-$  sont égaux;

ii) l'application  $\mu_X^i$  est continue à droite et admet une limite à gauche en chaque point.

PROPOSITION 6.3. i) L'ensemble  $f^{-1}(X^i)$  est contenu dans  $X^i$ ;

ii) il existe un réel  $\rho_X^i$  tel que pour tout  $x$  dans  $\tilde{X}^i$  et tout entier  $k$  positif:

$$-1 < p_1(\tilde{f}^{-k}(x)) - p_1(x) + k\rho^i < 1;$$

## Patrice Le Calvez

iii) il existe un ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation  $\rho_X^i$  sur  $X^i$ .

On peut définir de façon analogue un nombre de rotation  $\rho_X^s$  sur  $X^s$ . La différence  $\rho_X^s - \rho_X^i$  est alors indépendante du relèvement  $\tilde{f}$  choisi. Grâce au théorème 3.3 on a les propriétés suivantes:

- i)  $\rho_X^i \leq \rho_X^s$ ;
- ii) si  $X' \in \mathcal{X}^*(f)$  est inclus dans  $X$ ,

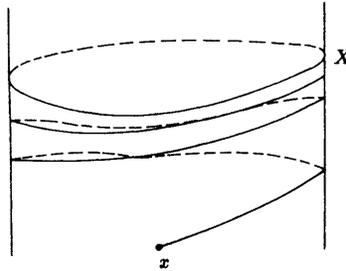
$$\rho_X^i \leq \rho_{X'}^i, \quad \text{et} \quad \rho_{X'}^s \leq \rho_X^s;$$

iii) pour tout  $x \in X$  et pour tout  $k \in \mathbf{N}$ ,

$$\begin{aligned} -1 + k \rho_X^i &\leq p_1(\tilde{f}^k(x)) - p_1(x) \leq 1 + k \rho_X^s, \\ -1 - k \rho_X^s &\leq p_1(\tilde{f}^{-k}(x)) - p_1(x) \leq 1 - k \rho_X^i. \end{aligned}$$

Le plus petit intervalle obtenu de cette façon est  $[\rho_{\Lambda(f)}^i, \rho_{\Lambda(f)}^s]$ , on l'écrira plus simplement  $[\rho^i(\tilde{f}), \rho^s(\tilde{f})]$ .

Les nombres  $\rho_X^i$  et  $\rho_X^s$  peuvent être distincts comme le montre la figure suivante:



## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

L'ensemble  $X$  est la réunion d'un graphe invariant  $\Lambda$  de nombre de rotation  $\rho > 0$  (c'est l'attracteur de Birkhoff) et d'une branche de la variété instable d'un point fixe hyperbolique.

Plus surprenant est le théorème qui suit du à Birkhoff [Bi 3] qui exprime que  $\rho^i(\tilde{f})$  et  $\rho^s(\tilde{f})$  peuvent être distincts. En effet tous les points sont frontières à la fois de  $U_\Lambda$  et de  $V_\Lambda$  et pourtant ils n'ont pas tous le même nombre de rotation.

THÉORÈME 6.1. *Il existe  $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{K}}$  tel que  $\rho^i(\tilde{f}) < \rho^s(\tilde{f})$ .*

DÉMONSTRATION: Nous donnons la démonstration originale de Birkhoff. Considérons un élément  $f_o$  de  $\mathcal{K}$  qui préserve l'aire et qui admet une région d'instabilité  $C$  délimitée par les graphes de deux applications continues  $\psi^i$  et  $\psi^s$  sur lesquels un relèvement  $\tilde{f}_o$  de  $f_o$  induit deux nombres de rotation  $\rho^i$  et  $\rho^s$  avec  $\rho^i < \rho^s$ . Considérons maintenant une application  $\psi$  de classe  $C^1$  dont le graphe divise l'anneau en deux parties d'aires égales.

On définit une famille  $(\tilde{f}_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  d'éléments de  $\tilde{\mathcal{K}}^*$  par la relation:

$$\tilde{f}_\varepsilon(\theta, r) = \tilde{f}_o(\theta, (1 - \varepsilon)r + \varepsilon\psi(\theta))$$

et la famille correspondante  $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1[}$  d'éléments de  $\mathcal{K}^*$ . Le compact  $X_\varepsilon = \bigcap_{n \geq 0} f_\varepsilon^n(C)$  divise la couronne  $C$  en deux parties d'aires égales  $U_\varepsilon$  et  $V_\varepsilon$ . En effet, puisque  $f_o$  préserve l'aire, la couronne délimitée par  $C^i$  et  $f_\varepsilon(C^i)$  a une aire égale à  $\varepsilon \int_0^1 (\psi(\theta) - \psi^i(\theta)) d\theta$ , ainsi l'aire de  $U_\varepsilon$  est

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \varepsilon)^k \times \varepsilon \int_0^1 (\psi(\theta) - \psi^i(\theta)) d\theta \\ &= \int_0^1 (\psi(\theta) - \psi^i(\theta)) d\theta, \end{aligned}$$

## Patrice Le Calvez

c'est-à-dire la moitié de celle de  $C$ .

L'attracteur de Birkhoff  $\Lambda_\varepsilon = \Lambda(f_\varepsilon)$  divise également  $C$  en deux parties d'aires égales. Choisissons maintenant une suite  $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$  tendant vers 0 telle que  $(\Lambda_{\varepsilon_n})_{n \geq 0}$  converge. Sa limite  $\Lambda$  est compacte, connexe, invariante par  $f_o$  et ne se réduit pas à un bord, elle contient donc  $C^i$  et  $C^s$  graphes respectifs de  $\psi^i$  et de  $\psi^s$ , ceci par la proposition 5.1. Tout point de  $C^i$  est donc une limite d'une suite de points à valeurs dans  $\Lambda_{\varepsilon_n}^i$ . Des relations:

$$\begin{aligned} \forall x \in \tilde{\Lambda}_{\varepsilon_n}^i, \forall k \in \mathbb{N}, \quad -1 < p_1(\tilde{f}_{\varepsilon_n}^{-k}(x)) - p_1(x) + k\rho^i(f_{\varepsilon_n}) < 1, \\ \forall x \in \tilde{C}^i, \forall k \in \mathbb{N}, \quad -1 < p_1(\tilde{f}_o^{-k}(x)) - p_1(x) + k\rho^i < 1, \end{aligned}$$

et du fait que la suite  $(\tilde{f}_{\varepsilon_n})$  converge uniformément vers  $\tilde{f}_o$  sur  $\tilde{C}$  on en déduit comme dans la proposition 2.1 que  $(\rho^i(\tilde{f}_{\varepsilon_n}))_{n \geq 0}$  converge vers  $\rho^i$ . La suite  $(\rho^s(\tilde{f}_{\varepsilon_n}))_{n \geq 0}$  converge de même vers  $\rho^s$ , les nombres  $\rho^i(\tilde{f}_{\varepsilon_n})$  et  $\rho^s(\tilde{f}_{\varepsilon_n})$  sont donc distincts dès que  $n$  est grand.  $\square$

REMARQUE 1: On peut donner des exemples plus explicites d'attracteurs de Birkhoff ayant deux nombres de rotation [L 3]. Si  $\varphi \in C^1(\mathbf{T}^1)$ , si  $\int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0$  et si  $\tilde{f}_\varphi^1$  n'a pas de graphe invariant, alors:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \rho^s(\tilde{f}_\varphi^\lambda) = - \lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \rho^i(\tilde{f}_\varphi^\lambda) = +\infty.$$

REMARQUE 2: Un attracteur de Birkhoff ayant deux nombres de rotation distincts n'est pas une courbe de Jordan, il est topologiquement plus compliqué, c'est un continu indécomposable. En effet on montre en utilisant l'interprétation des nombres de rotation en termes de bouts premiers (§3.4) qu'il n'est pas réunion de deux compacts connexes propres (M. Charpentier [Cha], [L 3]).

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

Le fait que l'attracteur de Birkhoff a deux nombres de rotation distincts n'est pas exceptionnel, en effet:

**THÉORÈME 6.2.** *Les applications  $\rho^i$  et  $\rho^s$  de  $\tilde{\mathcal{K}}^*$  dans  $\mathbf{R}$ , qui associent à chaque  $\tilde{f}$  de  $\tilde{\mathcal{K}}^*$  les nombres  $\rho^i(\tilde{f})$  et  $\rho^s(\tilde{f})$  sont respectivement semi-continue supérieurement et semi-continue inférieurement. En particulier les éléments de  $\tilde{\mathcal{K}}^*$  ayant deux nombres de rotation distincts forment un ouvert de  $\tilde{\mathcal{K}}^*$ .*

**DÉMONSTRATION:** Soit  $(\tilde{f}_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $\tilde{\mathcal{K}}^*$  convergant vers  $\tilde{f}$ . Puisque la condition ii) vérifiée par un élément de  $\mathcal{K}$  est ouverte la suite  $(\Lambda(\tilde{f}_n))_{n \geq 0}$ , de même que les suites  $(\rho^i(\tilde{f}_n))_{n \geq 0}$  et  $(\rho^s(\tilde{f}_n))_{n \geq 0}$  sont bornées (proposition 2.1). Le théorème sera montré si toute valeur d'adhérence  $\rho$  de la suite  $(\rho^i(\tilde{f}_n))_{n \geq 0}$  est inférieure ou égale à  $\rho^i(\tilde{f})$ . On peut extraire une suite telle que  $(\rho^i(\tilde{f}_{n_\ell}))_{\ell \geq 0}$  converge vers  $\rho$  et  $(\Lambda(\tilde{f}_{n_\ell}))_{\ell \geq 0}$  vers un élément  $\Lambda$  de  $\mathcal{X}(f)$ .

Des inégalités

$$\forall x \in \tilde{\Lambda}^i, \forall k \in \mathbf{N}, -1 < p_1(f^{-k}(x)) - p_1(x) + k\rho_\Lambda^i$$

$$\forall x \in \tilde{\Lambda}(f_{n_\ell}), \forall \ell \in \mathbf{N}, \forall k \in \mathbf{N} \quad \tilde{p}_1(\tilde{f}_{n_\ell}^{-k}(x)) - p_1(x) + k\rho^i(f_{n_\ell}) < 1,$$

et du fait que tout point de  $\Lambda^i$  est limite d'une suite de points à valeurs dans  $\tilde{\Lambda}(f_{n_\ell})$ , on en déduit  $\rho \leq \rho_\Lambda^i \leq \rho^i(\tilde{f})$ .  $\square$

**REMARQUE:** Les applications  $\rho^i$  et  $\rho^s$  ne sont pas continues [L 3].

On a vu plus haut un exemple où  $f$  n'avait pas d'autre ensemble d'Aubry-Mather dans  $X$  que ceux correspondant à  $\rho_X^i$  et à  $\rho_X^s$ . La situation est différente dans le cas où  $X$  est l'attracteur de Birkhoff de  $f$ .

**Patrice Le Calvez**

**THÉORÈME 6.3.** *Pour tout réel  $\rho$  appartenant à  $[\rho^i(\tilde{f}), \rho^s(\tilde{f})]$  il existe un ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation  $\rho$  inclus dans  $\Lambda(f)$ .*

**DÉMONSTRATION:** Grâce au caractère fermé de  $\mathcal{R}(\tilde{f})$  et de  $\Lambda(f)$ , grâce à la proposition 3.5 appliquée aux ouverts  $U_\Lambda$  et  $V_\Lambda$ , il suffit de montrer que si  $p \in \mathbf{Z}$  et  $q \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$  sont premiers entre eux et si  $\rho = \frac{p}{q}$  appartient à  $]\rho^i(f), \rho^s(f)[$ , il existe un ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation  $\rho$ .

Raisonnons par l'absurde, si  $\rho$  n'appartient pas à  $\mathcal{R}(f)$  nous savons par la proposition 5.1 que l'une des relations suivantes est vraie:

$$\begin{aligned} U_{C_\rho} &\subset f^q(U_{C_\rho}), \\ V_{C_\rho} &\subset f^q(V_{C_\rho}). \end{aligned}$$

Supposons par exemple que ce soit la première. L'ensemble d'Aubry-Mather  $\Xi^i$  de nombre de rotation  $\rho^i(f)$  qui est contenu dans  $\Lambda$  est alors contenu dans  $U_{C_\rho}$  (proposition 5.1), ainsi  $V_\Lambda$  rencontre  $U_{C_\rho}$  puisque  $\Lambda$  est la frontière de  $V_\Lambda$ . Mais l'inclusion

$$V_\Lambda \cap U_{C_\rho} \subset f^q(V_\Lambda \cap U_{C_\rho})$$

contredit le caractère dissipatif de  $f$ . □

Il y a une grande analogie entre les régions d'instabilité des éléments de  $\mathcal{K}$  qui préservent l'aire et les attracteurs de Birkhoff. La raison étant la propriété d'intersection commune intervenant dans les deux cas. Continuons les analogies en étudiant maintenant le cas générique. Supposons que  $f$  soit dans  $\mathcal{K}^*$  et vérifie:

- i) tout point périodique de  $f$  est une selle ou un puits,

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

- ii) les variétés stables et instables de deux selles périodiques s'intersectent transversalement,
- iii) les nombres de rotation de l'attracteur de Birkhoff sont distincts.

THÉORÈME 6.4. i) Il existe un ouvert dense de  $[\rho^i(\tilde{f}), \rho^s(\tilde{f})]$  tel que tout ensemble  $f$ -ordonné dont le nombre de rotation est dans cet ouvert est hyperbolique.

ii) L'ensemble des rationnels de  $[\rho^i(\tilde{f}), \rho^s(\tilde{f})]$  pour lesquels il y a une orbite ordonnée qui est un puits n'a que des points isolés.

iii) Pour tout nombre rationnel  $\rho$  de  $[\rho^i(f), \rho^s(f)]$  il existe un ensemble d'Aubry-Mather hyperbolique  $\Xi$  de nombre de rotation  $\rho$  tel que  $\Lambda = \overline{W^u(\Xi)}$ .

DÉMONSTRATION: i) Les conditions i) et ii) ne sont rien d'autres que les corollaires 2.1 et 2.2 du Chapitre 2 écrits dans le cas dissipatif.

Dans la démonstration du théorème 2.2 nous avons montré l'existence d'un ensemble d'Aubry-Mather hyperbolique  $\Xi$ , pour tout rationnel strictement compris entre  $\rho^i(f)$  et  $\rho^s(f)$  tel que si on l'écrit:  $\Xi = \{x_i, i \in \mathbf{Z}\}$  où  $p_1(x_i) < p_1(x_{i+1})$ , alors  $W^u(x_i)$  rencontre  $W^s(x_{i+1})$ .

Grâce au  $\lambda$ -lemme, on en déduit que l'ensemble  $\overline{W^u(x)}$  est indépendant du choix de  $x$  dans  $\Xi$ , qu'il est compact, connexe et invariant par  $f$ . Comme  $W^u(x)$  se relève en un ensemble non borné de  $\tilde{\mathbf{A}}$ ,  $\overline{W^u(\Xi)} = \overline{W^u(x)}$  sépare l'anneau et contient  $\Lambda(f)$ .

Si  $W^u(x)$  n'est pas contenu dans  $\Lambda(f)$ , il existe une branche  $\Gamma$  qui n'est pas contenue, deux cas sont possibles

- $\Gamma \cap \Lambda(f) = \{x\}$
- il existe deux points de  $\Gamma \cap \Lambda(f)$  tels que la partie  $\Gamma'$  de  $\Gamma$

## Patrice Le Calvez

qui les joint n'a pas d'autre intersection avec  $\Lambda(f)$ .

La première propriété est impossible car  $x$  serait alors accessible par un chemin continu périodique à valeur dans  $U_{\Lambda(f)}$  ou dans  $V_{\Lambda(f)}$ . En utilisant l'interprétation du nombre de rotation en terme de bouts premiers et en se plaçant dans le revêtement  $\tilde{\mathbf{A}}$ , on en déduirait que l'un des nombres  $\rho^i(f)$  ou  $\rho^s(f)$  est égal à  $\rho$ .

Le second cas est également impossible. L'ensemble  $\Gamma' \cup \Lambda(f)$  devrait délimiter une région ouverte bornée  $W$ . Comme la suite  $(f^{-k}(\Gamma' \cup \Lambda(f)))_{k \geq 0}$  est bornée, il en serait de même de la suite  $(f^{-k}(W))_{k \geq 0}$ , ce qui contredit le caractère dissipatif de  $f$ .  $\square$

REMARQUE: La proposition précédente indique qu'il y a beaucoup d'hyperbolicité dans un attracteur de Birkhoff dont les nombres de rotation sont distincts. Notons cependant que si  $\rho^i(\tilde{f})$  ou  $\rho^s(\tilde{f})$  est irrationnel, l'ensemble d'Aubry-Mather associé n'est pas hyperbolique. Notons également que  $\Lambda$  peut posséder une infinité de puits ([L 3]).

(QUESTION: La dernière propriété est-elle dense quand on munit  $\mathcal{K}^*$  de la topologie  $C^1$ , parmi les applications ayant deux nombres de rotation distincts).

Nous allons conclure cette étude par une remarque sur les endomorphismes du cercle. Plus précisément nous allons voir comment ceux-ci apparaissent comme des cas-limites de difféomorphismes dissipatifs déviant la verticale et comment retrouver ainsi certains résultats:

Soit  $g: \mathbf{T}^1 \rightarrow \mathbf{T}^1$  une application de classe  $C^1$  et de degré 1 et  $\tilde{g}$  un relèvement de  $g$  à  $\mathbf{R}$ . On écrit  $\tilde{g} = \text{Id} + \varphi$  où  $\varphi \in C^1(\mathbf{T}^1)$  et on considère les familles  $\tilde{f}_\varphi^\lambda$  et  $f_\varphi^\lambda$  définies au Chapitre 1 ( $\tilde{f}_\varphi^\lambda(\theta, r) = (\theta + r, \lambda r + \varphi(\theta + r))$ ). Si  $f_\varphi^\lambda$  appartient à  $\mathcal{K}^*$  quand  $\lambda \in ]0, 1[$ , par

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

contre  $f_\varphi^o$  n'est plus un difféomorphisme, son image est le graphe de  $\varphi$  et la restriction à ce graphe est conjuguée à  $g$ .

Il est facile de montrer d'une part que la famille  $\Lambda(f_\varphi^\lambda)_{0 < \lambda < \frac{1}{2}}$  est bornée, d'autre part que par la topologie compacte ouverte  $f_\varphi^\lambda$  tend vers  $f_\varphi^o$  quand  $\lambda$  tend vers 0. Toute valeur limite de la famille  $(\Lambda(f_\varphi^\lambda))_{0 < \lambda < \frac{1}{2}}$  quand  $\lambda$  tend vers 0 est compacte, connexe, sépare l'anneau et vérifie  $f_\varphi^o(\Lambda) = \Lambda$ . Comme le graphe de  $\varphi$  est le seul ensemble vérifiant ces propriétés, on a :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Lambda(f_\varphi^\lambda) = \text{gr } \varphi;$$

De cette relation, de l'égalité  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} f_\varphi^\lambda = f_\varphi^o$  et des assertions:

- pour tout  $x \in \Lambda(f_\varphi^\lambda)$ , pour tout  $k \in \mathbf{N}$ ,

$$-1 + k \rho^i(\tilde{f}_\varphi^\lambda) < p_1(\tilde{f}_\varphi^\lambda(x)) - p_1(x) < 1 + k \rho^s(\tilde{f}_\varphi^1),$$

- pour tout  $\rho \in [\rho^i(\tilde{f}_\varphi^\lambda), \rho^s(\tilde{f}_\varphi^\lambda)]$ , il existe un ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation  $\rho$  dans  $\Lambda(f_\varphi^\lambda)$

on en déduit qu'il existe deux réels  $\rho^i$  et  $\rho^s$  tels que:

- $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \rho^i(\tilde{f}_\varphi^\lambda) = \rho^i$ ,  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \rho^s(\tilde{f}_\varphi^\lambda) = \rho^s$ ,
- pour tout  $x \in \mathbf{R}$  et pour tout  $k \in \mathbf{N}$   
 $-1 + k \rho_o^i \leq \tilde{g}^k(x) - x \leq 1 + k \rho_o^s$ ,
- pour tout  $\rho \in [\rho_o^i, \rho_o^s]$ , il existe une orbite de nombre de rotation  $\rho$ ,

résultat bien connu sur les endomorphismes du cercle (Newhouse, Palis, Takens [NPT]). □

RÉFÉRENCES

- [An] S.B. Angenent, *Monotone recurrence relations, their Birkhoff orbits and topological entropy*, Preprint, Univ. of Wisconsin (1988).
- [AL] S. Aubry, P.Y. Le Daeron, *The discrete Frenkel-Kontorava model and its generalizations*, Physica D 8 (1983), 381–422.
- [Ba] V. Bangert, *Mather sets for twist maps and geodesics on tori*, Dynamics reported, volume 1, John Wiley & Sons, 1988.
- [Bi 1] G.D. Birkhoff, *Surface transformations and their dynamical applications*, Acta. Math., vol 43 (1920), 1–119, ou Collected Math. Papers, vol II, Dover, New York, (1971), 111–229.
- [Bi 2] G.D. Birkhoff, *On the periodic motions of dynamical systems*, Acta. Math., vol 50 (1927), 359–379, ou Collected Math. Papers, vol II, 333–353.
- [Bi 3] G.D. Birkhoff, *Sur quelques courbes fermées remarquables*, Bull. Soc. Math. Fr., vol 60 (1932), 1–26, ou Collected Math. Papers, vol II, 444–461.
- [Bi 4] G.D. Birkhoff, *Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques*, Memoriae Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei, vol 1 (1935), 85–216, ou Collected Math. Papers, vol II, 530–661.
- [Bo 1] P. Boyland, *Rotation sets and Morse decompositions for twist maps*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 8 (1988), 33–61.
- [Bo 2] P. Boyland, *Braid types and a topological method of proving positive entropy*, Preprint.
- [BH] P. Boyland, G.R. Hall, *Invariant circles and the order structure of periodic orbits in monotone twist maps*, Topology 26 (1987), 21–35.
- [Ca 1] M. Casdagli, *Periodic orbits for dissipative twist maps*, Ergod.

## Étude Topologique des Applications Déviant la Verticale

- Th. & Dynam. Sys. 7 (1987), 165–173.
- [Ca 2] M. Casdagli, *Rotational chaos in dissipative systems*, Physica D 29 (1988), 365–386.
- [Cha] M. Charpentier, *Sur quelques propriétés des courbes de M. Birkhoff*, Bull. Soc. Math. Fr. 62 (1934), 193–224.
- [Che] A. Chenciner, Séminaire Bourbaki, n° 622, Astérisque, 121–123, Soc. Math. Fr. (1985), 147–170.
- [D] R. Douady, *Application du théorème des tores invariants*, Thèse de troisième cycle, Univ. Paris VII, 1982.
- [G] D. Goroff, *Hyperbolic sets for twist maps*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 5 (1985), 337–354.
- [Ha] G.R. Hall, *A topological version of a theorem of Mather on twist maps*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 4 (1984), 585–603.
- [He] M. Herman, *Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l’anneau*, Astérisque 103–104, Soc. Math. Fr. (1983).
- [HH] K. Hockett, P. Holmes, *Josephson’s junction, annulus maps, Birkhoff attractors, horseshoes and rotation sets*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 6 (1986), 205–239.
- [K] A. Katok, *Some remarks on Birkhoff and Mather twist map theorems*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 2 (1982), 185–194.
- [L 1] P. Le Calvez, *Existence d’orbites quasi-périodiques dans les attracteurs de Birkhoff*, Comm. Math. Phys. 106 (1986), 383–394.
- [L 2] P. Le Calvez, *Propriétés dynamiques des régions d’instabilité*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 20 (1987), 443–464.
- [L 3] P. Le Calvez, *Propriétés des attracteurs de Birkhoff*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 8 (1987), 241–310.
- [L4] P. Le Calvez, *Les ensembles d’Aubry-Mather d’un difféomor-*

Patrice Le Calvez

- phisme conservatif de l'anneau déviant la verticale sont en général hyperboliques*, C.R. Acad. Sci. Paris t 306 (1988), 51–54.
- [L 5] P. Le Calvez, *Propriétés générales des applications déviant la verticale*, Bull. Soc. Math. Fr. (1989), 69–102.
- [MS] R.S. Mac Kay, J. Stark, *Lectures on orbits of minimal actions for area-preserving maps*, Preprint, Univ. of Warwick.
- [Ma 1] J. Mather, *Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphism of the annulus*, Topology 21 (1982), 457–467.
- [Ma 2] J. Mather, *Glancing Billiards*, Ergodic Th. & Dynam. Sys. 2 (1982), 597–403.
- [Ma 3] J. Mather, *Topological proofs of some purely topological consequence of Caratheodory's theory of prime ends*, Selected Studies, North-Holland Publishing Company (1982), 225–255.
- [Ma 4] J. Mather, *Amount of rotation about a point and the Morse index*, Commun. Math. Phys. 94 (1984), 141–153.
- [Ma 5] J. Mather, *A criterion for the non-existence of invariant circles*, Publ. Math. de l'IHES 63 (1986), 153–204.
- [Mo 1] J. Moser, *Monotone twist mappings and the calculus of variations*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 6 (1986), 401–413.
- [Mo 2] J. Moser, *Recent developments in the theory of Hamiltonian Systems*, SIAM Review 8 (1986), 459–485.
- [NPT] S. Newhouse, J. Palis, F. Takens, *Bifurcation and stability of families of diffeomorphisms*, Publ. Math. de l'IHES 57 (1983), 5–72.
- [N] M.H.A. Newman, *Elements of the topology of plane sets of points*, Cambridge University Press, Cambridge, 1939.
- [SM] C.L. Siegel, J.K. Moser, *Lectures on celestial mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 1971.