SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

ENSAIOS MATEMÁTICOS
2021, Volume **36**, 53–274
doi.org/10.21711/217504322021/em362

Pseudo-groupe d'une singularité de feuilletage holomorphe en dimension deux

Frank Loray

Résumé. Un feuilletage holomorphe singulier, en dimension deux, est localement défini par un champ de vecteur holomorphe à zéro isolé : les feuilles sont les trajectoires complexes du champ de vecteur. L'étude des singularités de ces feuilletages, débutée à la fin du 19ème siècle avec les travaux de Poincaré et Dulac, a connu un fort développement à partir des années 80. Outre les problèmes de classification analytique, le thème qui nous intéresse particulièrement dans cet ouvrage est le lien entre l'existence d'un certain type d'intégrale première (multiforme) pour le feuilletage et la finitude de la dimension du pseudo-groupe d'holonomie. Par exemple, le feuilletage admet une intégrale première dans la classe de Liouville si, et seulement si, le pseudo-groupe est affine, de dimension deux.

La dimension est celle de la clôture du pseudo-groupe pour une topologie adéquate : nous comparerons dans cet ouvrage la clôture pour la convergence uniforme et la clôture de type Zariski introduite par Bernard Malgrange pour définir le groupoïde de Galois du feuilletage. Si la seconde conduit à une caractérisation simple et complète de l'intégrabilité du feuilletage, la première a l'avantage d'être de nature topologique/dynamique ; les deux approches coïncident sur une large classe de feuilletages.

La première partie du texte est consacrée à l'étude des groupes de germes de difféomorphismes analytiques fixant $0 \in \mathbb{C}$, i.e. des sous-groupes de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Après avoir rappelé les résultats de classifications formelle et analytique, nous donnons une description complète de la dynamique du pseudo-groupe induit sur un voisinage de 0 ainsi que ses clôtures pour les deux topologies précédentes. Comme résurgence du Théorème de Lie sur

la classification des géométries de la droite, nous obtenons la dichotomie suivante : ou bien le pseudo-groupe est de dimension ≤ 2 et sa dynamique est affine ou essentiellement discrète, ou bien il est de dimension infinie et sa clôture est le pseudo-groupe de toutes les transformations conformes. La seconde alternative est spécialement spectaculaire dans le cas de la topologie de convergence uniforme. Ces résultats reposent sur une étude complète des germes de difféomorphismes tangents à l'identité : ils apparaissent naturellement comme commutateurs des éléments de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$; c'est le cœur de la première partie de notre ouvrage.

Dans la seconde partie, nous rappelons la classification analytique des singularités réduites (ou non dégénérées) puis expliquons, à l'aide de la résolution des singularités par éclatements, comment décortiquer le pseudo-groupe d'holonomie le long du diviseur exceptionnel. L'holonomie des composantes invariantes du diviseur en sont des ingrédients essentiels : ce sont des sous-groupes de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$. Nous terminons par le résultat principal : un critère topologique d'intégrabilité pour une large classe de singularités. On y utilise toutes les notions développées durant ce livre ainsi que les résultats obtenus par Guy Casale sur la classification des groupoïdes de Galois et sur les intégrales premières d'un feuilletage.

Mots clefs. Feuilletage holomorphe, Pseudo-groupe, Singularité

Abstract. A singular holomorphic foliation, in dimension two, is locally defined by a holomorphic vector field with isolated zero : leaves are trajectories of the vector field. The study of their singularities, which begun at the end of the 19th century through Poincaré and Dulac works, had a huge development from the 80'. Beside analytic classification problems, we are mainly interested in this book by the links between the existence of (multiform) first integrals of a certain kind for the foliation and finitness of the dimension of the holonomy pseudo-group. For instance, the foliation admits a liouvillian first integral if, and only if, the pseudo-group is affine, of dimension two.

The dimension is that of the closure of the pseudo-group for a convenient topology : we will compare the closure of uniform convergence and the Zariski like closure introduced by Bernard Malgrange in order to define the Galois groupoid of the foliation. If the later approach leads to a simple and complete characterization of the integrability of the foliation, the former one has the advantage to be of topological/dynamical nature ; the two definitions actually coincide for a large class of singularities.

The first part of the book is devoted to studying groups of germs of diffeomorphisms fixing $0 \in \mathbb{C}$, i.e. subgroups of $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. After recalling formal and analytic classification results, we provide a complete descrition of the dynamics of the pseudo-group induced on the neighborhood of 0 as well as its closures for above topologies. A resurgence of Lie's classification of the geometries of the line arise in the following dichotomy : either the pseudo-group has dimension at most two and is affine or discrete, or it is infinite dimensional and its closure is the whole conformal pseudo-group. Those results relie on a complete study of tangent to the identity diffeomorphisms : they naturally appear as commutators of elements of $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$; they play a fundamental role in the first part of the book.

In the second part, we recall the analytic classification of reduced (or non degenerate) singularities of foliations and then explain how to recover the holonomy pseudo-group of a general singularity from the resolution by blowing-ups. The holonomy of the invariant components of the exceptional divisor after blowing-up the main generators of the pseudo-group : they are subgroups of $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. We end-up by the main result : a topological criterium of integrability for a huge class of foliation singularities. Here, we use most of the tools developped along this book as well as results obtained by Guy Casale on the classification of Galois groupoids and first integrals for foliations.

Keywords. Holomorphic Foliation, Pseudo-group, Singularity

2020 Mathematics Subject Classification: Primary: 32S65. Secondary: 22Exx, 34Cxx, 34Mxx, 37F75, 57Sxx, 58Hxx.